2025

Programme / Lehrplan

DFG / LFA

Mathématiques / Mathematik

Enseignement commun / Gemeinsames Fach

Classes de 2nde, 1ère et Terminale / Klassenstufen 10, 11 und 12

Table de matières

1 Idées directrices

1.1. Finalités éducatives

L'enseignement des mathématiques favorise de manière significative le développement personnel des jeunes en leur transmettant des compétences méthodologiques, des connaissances disciplinaires et des attitudes adaptées et renforce ainsi l'autodétermination fondée sur une pensée rationnelle. En cela, l'enseignement des mathématiques apporte une contribution majeure à une formation générale approfondie.

Les connaissances mathématiques acquises à l'école constituent donc une part importante de la capacité générale à étudier et la base disciplinaire pour les jeunes qui choisissent une poursuite d'études ou un domaine de carrière caractérisé par la pensée mathématique. Outre les mathématiques, les sciences et les disciplines technologiques, ces connaissances constituent désormais un enjeu croissant pour les sciences économiques et sociales.

Être capable d'opérer des transferts en se fondant sur des lois mathématiques et leur mobilisation constitue également une valeur intellectuelle en soi et représente une contribution importante des mathématiques à notre culture. Les compétences développées dans les cours de mathématiques permettent une évaluation critique des évolutions sociétales et encouragent une action responsable.

Un aperçu des différentes traditions pédagogiques spécifiques à chaque pays contribue au développement des compétences interculturelles franco-allemandes.

1.2. Objectifs

Un cours de mathématiques doit notamment

- initier les élèves aux mathématiques en tant que science appliquée, pertinente au quotidien ainsi que tournée vers la preuve, déduction et l'expérimentation ;
- promouvoir la créativité et l'imagination ;
- permettre aux élèves d'opérer des transferts en se fondant sur des lois mathématiques et leur mobilisation ;
- sensibiliser les élèves au développement culturel, historique et philosophique des mathématiques ;
- servir de terrain d'exercice aux techniques de travail et de terrain de développement des stratégies cognitives ;
- mettre en évidence les liens entre les différents champs des mathématiques et avec d'autres sciences ;
- contribuer à la capacité générale d'étudier.

Ainsi, pour les cours de mathématiques générales, se posent entre autres les enjeux suivants.

A- <u>Compétences cognitives et procédurales</u>[1]

D'une manière générale, les élèves doivent être capables de

- modéliser des situations issues de la réalité et valider ou rejeter des modèles existants (modélisation) ;
- Rechercher et relier des résultats partiels, se fonder sur des preuves et fournir des justifications (argumenter et démontrer) ;
- rechercher, sélectionner et utiliser des outils appropriés pour résoudre des problèmes – y compris à l'aide de logiciels adaptés (résoudre des problèmes) ;
- discuter des mathématiques, de résultats et de moyens de trouver des solutions tant à l'oral qu'à l'écrit (communiquer) ;

[1] Ce programme prend en compte les compétences mathématiques générales formulées dans une logique procédurale selon les standards d'éducation (KMK) pour l'accès à des études de mathématiques dans l'enseignement supérieur, sans caractérisation, ni attribution spécifique. Ces compétences rejoignent les six compétences des programmes français : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer.

- extraire des informations de représentations et, inversement, présenter les résultats de manière appropriée ;
- traiter les éléments symboliques, formels et techniques des mathématiques (calculer, appliquer et mettre en œuvre des techniques).

B- Compétences numériques et techniques

Grâce à l'utilisation d'outils mathématiques numériques tels que les calculatrices graphiques, les logiciels de géométrie dynamique, les tableurs ou l'intelligence artificielle les processus d'enseignement et d'apprentissage peuvent être soutenus, enrichis et restructurés. Cette compétence des médias doit toujours être prise en compte lors de la conception des projets de cours, même si elle n'est pas toujours spécifiée dans le programme.

C- Compétences de gestion de soi, d'orientation et de travail en équipe

Les cours favorisent l'apprentissage par la découverte. Le développement de stratégies heuristiques par l'expérimentation et les démarches d'essais-erreurs permet aux élèves de découvrir et d'analyser des articulations et des structures. Il permet aux élèves d'isoler les informations essentielles pour une tâche à venir parmi une grande quantité d'informations.
L'enseignement guide les élèves vers un apprentissage à la fois autonome et collaboratif. Il contribue au développement de la confiance en soi et de l'autodiscipline, de la volonté de réussir et de la capacité à se concentrer.

D- Compétences citoyennes et démocratiques

Les cours renforcent et développent les compétences de communication. Les concepts mathématiques sont présentés oralement et par écrit ou illustrés graphiquement. La traduction entre différentes formes de représentation, la formalisation, le travail algorithmique et calculatoire sont des formes spécifiques d'expression mathématique. La maîtrise du langage technique ouvre l'accès à de nombreuses disciplines, notamment scientifiques, techniques et économiques.
Les cours forme à la précision conceptuelle ; il enseigne la capacité à formuler des affirmations avec précision et à tirer des conclusions logiques. Il favorise la volonté et la compétence d'argumentation et l'esprit critique. Il utilise différents niveaux d'argumentation, de la clarification basée sur des exemples à la preuve formelle.
L'enseignement offre un aperçu exemplaire de la genèse historique des mathématiques et de leur importance pour le développement de notre société.

E- Compétences franco-allemandes, européennes et internationales

L'enseignement entièrement intégré des classes de 2nde, 1ère et terminale au lycée franco-allemand signifie toujours que, pour certains élèves, la langue partenaire est utilisée comme langue d'enseignement dans les matières non linguistiques. L'utilisation des langues étrangères comme langues de travail intensifie l'apprentissage disciplinaire et linguistique et sert à préparer à l'internationalisation croissante de l'éducation, des études et de la vie professionnelle. Dans ce sens, la compréhension de la culture du partenaire est favorisée par la sensibilisation aux processus linguistiques d'une part et aux différentes approches des questions disciplinaires selon la tradition didactique d'autre part.

1.3. Enjeux méthodologiques

Une réussite scolaire durable et pérenne nécessite une approche didactique fine et différenciée. Une attention particulière sera accordée aux points suivants :

- L'enseignement contribue au développement d'une logique mathématique de base permettant une appropriation tant du contenu que des stratégies fondamentales.
- L'enseignement accorde une attention particulière à l'articulation des contenus de cours et au développement de transferts avec d'autres disciplines, permettant ainsi des phases de révision systématique.

- En classe, l’utilisation d’outils et de médias numériques peut faciliter l’accès au contenu mathématique.
- L’enseignement mobilise davantage des situations contextualisées, en proposant également des questionnements ouverts laissant place à plusieurs approches ou résultats.

Dans de nombreux domaines de la vie quotidienne et dans presque tous les domaines de la vie professionnelle où des activités hautement qualifiées sont exercées, il est important de comprendre et de traiter ultérieurement des relations quantitatives et des structures abstraites. Dans ce contexte, des approches heuristiques, des stratégies de résolution de problèmes et des procédures qui vont bien au-delà des techniques élémentaires de calcul sont de plus en plus utilisées. L'utilisation d'outils mathématiques numériques tels que les calculatrices graphiques (CG), les logiciels de géométrie dynamique, les tableurs ou l’intelligence artificielle nécessite souvent de comprendre les méthodes mathématiques sous-jacentes, car c'est la seule façon d'évaluer les possibilités et les limites de ces outils et de les utiliser efficacement. Cela implique une analyse critique notamment des résultats obtenus grâce à l'intelligence artificielle.

Il semble judicieux de relier différents contenus et compétences et de les reprendre à plusieurs reprises dans d’autres contextes afin de rendre possible un apprentissage en profondeur en forme de spirale.

En outre, il faut accorder, notamment en seconde, suffisamment de temps à l'unification du corps étudiant franco-allemand. Ici, différentes approches, styles d’expression orale et écrite sont abordés et les principes de base sont alignés et consolidés. La fusion peut avoir lieu dans un bloc plus grand au début de seconde.

1.4.

1.5. Évaluation

D'une part, l'évaluation est réalisée dans le cadre d'une mesure des performances liée au processus d'apprentissage, en tenant compte des performances en classe.

D'autre part, les travaux écrits servent à évaluer et à fournir un retour sur les compétences acquises en classe par rapport aux sujets et aux matières d'apprentissage abordés en classe. La description des domaines d’exigence sert de guide pour la construction des tâches. Avec leur aide et conformément au programme, des tâches d’évaluation des performances devraient être formulées. L’objectif de l’évaluation doit être de mesurer les performances des candidats de la manière la plus différenciée possible.

La prise en compte des **domaines d’exigences** contribue de manière significative à parvenir à un rapport équilibré entre les exigences, à accroître la comparabilité des tâches et à rendre l’évaluation des performances transparente. Le programme actuel n’identifie pas explicitement les domaines d’exigence dans les différentes matières.

Le **domaine d'exigence I (Reproduction)** comprend généralement des tâches avec un degré de complexité inférieur telles que

• la reproduction de données, de faits, de règles, de formules, de phrases, etc. à partir d'une zone définie dans le contexte appris,

• la description et l’utilisation de techniques et de procédures de travail apprises et pratiquées dans un domaine limité et dans un contexte répétitif.

Le **domaine d'exigence II (transferts)** comprend généralement des tâches d'un degré de complexité moyen tels que

• la sélection, l'agencement et la présentation de manière autonome de contenus connus donnés dans un contexte maîtrisé par la pratique et similaire des entraînements réalisés en classe,

• l’application en autonomie de ce qui a été appris à des situations nouvelles comparables, qui impliquent soit des questions modifiées, soit des contextes modifiés, soit des procédures adaptées.

Le **domaine d'exigence III (généralisation et réflexion)** comprend généralement des tâches avec un degré de complexité plus élevé telles que

• le traitement systématique et créatif de problèmes complexes dans le but d'arriver de manière indépendante à des solutions, des interprétations, des évaluations et des conclusions,

• la sélection et l’adaptation conscientes et indépendantes de techniques et de procédures de travail apprises et appropriées pour faire face à de nouveaux problèmes.

2 Contenus et compétences disciplinaires

Le programme est structuré en fonction des différents domaines d'apprentissage. Le contenu obligatoire et les compétences obligatoires attendues sont énumérés dans deux colonnes. L'affectation des compétences attendues au contenu n'exclut pas la possibilité que des compétences supplémentaires puissent être acquises par les élèves.

L'ordre des différents sujets au sein du niveau scolaire spécifié n'est contraignant que dans la mesure où il apparaît logiquement nécessaire. Cependant, il n'anticipe pas les décisions didactiques et méthodologiques de l'enseignant ni les conseils d'enseignement de mathématiques.

2.1 Classe de seconde

2.1.1 Algèbre

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Ensemble de nombres • Ensemble des nombres entiers naturels : ℕ = {0, 1, 2, 3, … } • Ensemble des nombres entiers : ℤ = {… , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … } • Ensemble des nombres rationnels : ℚ • Ensemble des nombres réels : ℝ • Intervalle **Ordre** • inéquations • inéquations linéaires à une inconnue • valeur absolue	Les élèves • appliquent la terminologie et les notations des ensembles de nombres particuliers et des intervalles (intersection, union, sous-ensemble, intervalles ouverts et fermés), • déterminent les solutions des inéquations en utilisant des transformations algébriques, par addition ou soustraction d'un même terme des deux côtés, par multiplication des deux côtés par un nombre ou division par un nombre non nul. • déterminent les solutions d'inéquations dont la résolution nécessite la formation de l'inverse, de la racine, du carré ou d'une puissance, • résolvent les inéquations produits et des inégalités rationnelles à l'aide d'un tableau de signes, • résolvent des équations avec des valeurs absolues.
Termes et fonctions du 2nd degré • forme normale $ax^2 + bx + c = 0$ • équations du second degré • forme canonique • étude du signe • représentation graphique des fonctions du second degré	Les élèves • résolvent des équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ en utilisant le discriminant ou par factorisation, • factorisent des termes quadratiques simples si la structure du terme le permet, • déterminent les coordonnées du sommet de la parabole à l'aide de la forme canonique • tracent la courbe représentative d'une fonction du second degré à l'aide de la forme canonique, • décrivent l'allure de la courbe d'une fonction du second degré en fonction du paramètre a et du discriminant, • résolvent les inéquations du second degré.

Polynômes	Les élèves
• définition (degré, coefficients) • racines • égalité des polynômes • factorisation de polynômes de degré ≤3 (en supposant qu'une racine est connue)	• utilisent la structure du terme pour déduire les propriétés du polynôme et déterminent les polynômes possédant certaines propriétés, • factorisent des polynômes dont une racine est connue, par identification des coefficients ou par division polynôme, • déterminent le signe d'un polynôme factorisé (tableau de signes).

Contenus facultatifs

Ordre • *valeur absolue*	*Les élèves* • *résolvent des inéquations avec valeur absolue.*
Polynômes • *études de signes*	*Les élèves* • *résolvent des inéquations polynômes (maximum 4ème degré).*

Indication

- La résolution de l'équation $x^2 + px + q = 0$ peut se faire par l'expression de la somme et du produit des racines.

2.1.2 Analyse

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**
Fonctions • ensemble de définition, ensemble image. • fonction paire et impaire • sens de variation • représentation graphique de la fonction • extremum - global, local - maximum, minimum	Les élèves • nomment les propriétés de symétrie d'une fonction à l'aide de sa courbe représentative graphique et dressent son tableau de signes, • utilisent la courbe représentative pour déterminer les variations de la fonction, dressent son tableau de variations, • résolvent graphiquement les équations de la forme $f(x) = m$ et les in équations de la forme $f(x) < m$, • conjecturent graphiquement ou déterminent par le calcul les extremums d'une fonction.

Fonctions de référence • fonctions affines • fonctions du second degré • fonction racine carrée • fonction inverse • fonction valeur absolue • fonction cube	Les élèves • décrivent les variations des fonctions de référence et savent dresser leurs tableaux de signes, • tracent les courbes représentatives des fonctions de référence et, inversement, reconnaissent une fonction de référence à partir de sa représentation graphique, • créent, pour une fonction de référence f, des transformations simples de la forme $g(x) = f(x) + c$, $g(x) = a \cdot f(x)$ et $g(x) = f(x + b)$ et tracent leur représentation graphique.
Limites • limites des fonctions à l'infini • limites des fonctions en un point	Les élèves • à l'aide d'un outil mathématique numérique, déterminent les limites des fonctions de base ainsi que les limites des sommes, des produits et des quotients de ces fonctions.
Continuité • définition de la continuité d'une fonction en un point • continuité sur un intervalle • théorèmes pour les fonctions continues sur les intervalles - théorème des valeurs intermédiaires - application à l'annulation d'une fonction	Les élèves • explicitent de manière intuitive à l'aide de la courbe représentative les notions de « continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle », • étudient graphiquement la continuité de certaines fonctions définies par morceaux, • explicitent la signification intuitive des théorèmes de continuité et les appliquent à la résolution de problèmes.
Fonctions polynômes	Les élèves • identifient les fonctions polynômes et déterminent le comportement des fonctions polynômes à l'infini, • déterminent les racines d'une fonction polynôme et décomposent le polynôme en facteurs de degré 1. o déterminer les racines à partir d'une forme factorisée du polynôme en utilisant le théorème du produit nul (un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul) ; o justifier qu'un polynôme est divisible par $(x - x_0)$ si et seulement si x_0 est une racine du polynôme; o déterminer la forme factorisée d'un polynôme de degré au plus 3 à l'aide d'une division polynôme ; o explicitent que le nombre de racines réelles d'un polynôme ne peut pas excéder son degré.

Dérivation - dérivabilité d'une fonction en un point et sur un intervalle - tangente à la courbe représentative de f - fonction dérivée f' - fonctions dérivées des fonctions de référence **:** - $f(x) = c$ - $f(x) = x$ - $f(x) = x^2$ - $f(x) = \frac{1}{x}$ - $f(x) = \sqrt{x}$ - $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ • dérivée : - du produit d'une fonction dérivable par un réel, - de la somme de deux fonctions dérivables, - du produit de deux fonctions dérivables, •	Les élèves • explicitent le terme « dérivabilité » à l'aide de graphiques, • connaissent et utilisent à bon escient la notion « f dérivable en x_0 », la notation $f'(x_0)$, • connaissent la signification géométrique de $f'(x_0)$ comme coefficient directeur de la tangente au point P de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, • savent tracer la tangente en un point de la courbe connaissant le nombre dérivé, • associent à la courbe d'une fonction celle de sa fonction dérivée et vice versa, • déterminent les fonctions dérivées des fonctions de référence.

Étude des fonctions à l'aide de fonctions dérivées	À l’aide de la dérivée, les élèves
• intervalles monotones : Relation entre le signe de la fonction dérivée et le sens de variation de la fonction • extrema : - minimum/maximum local - condition nécessaire $f'(x_0) = 0$ - condition suffisante • application du calcul différentiel : - Ajuster des fonctions à des données ; - Modéliser des situations issues de la vie quotidienne	• déterminent par le calcul les variations d'une fonction et dressent son tableau de variations, • déterminent par le calcul les extremums locaux des fonctions , le maximum et le minimum, • déterminent une fonction polynôme (de degré au plus 4) ayant des propriétés données, • modélisent des situations issues de la vie quotidienne.

Contenus facultatifs

Étude des fonctions à l'aide de fonctions dérivées	*Les élèves*
problèmes d’optimisation	• *résolvent des problèmes d’optimisation.*

Indications complémentaires

- La notion de limite ne fait pas l’objet d’une étude théorique. Elle est abordée intuitivement et à l’aide de la calculatrice.
- Une introduction détaillée et rigoureuse du concept de continuité n’est pas attendue. Le traitement de la continuité doit rester qualitatif.
- L’introduction du concept de dérivation peut par exemple être faite comme le taux de variation instantané d'une fonction. Des situations concrètes permettent de mieux comprendre cette approche.
- Pour la dérivation, on se limite à des fonctions simples afin que les idées essentielles ne soient pas obscurcies par une technicité excessive.
- L’utilisation d’autres noms de variables (x, t, s etc.) est utile, notamment en vue d’ autres disciplines scientifiques.
- Les études de fonctions doivent être limitées aux fonctions polynômes, même si des exemples d’autres types de fonctions peuvent apparaître dans les exercices.

2.1.3 Géométrie[2]

[2] Dans ce qui suit, les repères sont orthonormés.

<table>
<tr><th>Contenu obligatoire</th><th>Compétences à acquérir</th></tr>
<tr><td>Vecteurs dans le plan
vecteur de translation
vecteur position ($\overrightarrow{OM}$ pour un point M)
égalité des vecteurs
addition de vecteurs (règle de Chasles: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$)
produit d'un vecteur par un nombre réel
colinéarité de vecteurs
représentation d’un vecteur dans un repère orthonormé
longueur d'un vecteur</td><td>Les élèves
justifient le théorème:
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme,
représentent géométriquement la somme de deux vecteurs,
représentent un vecteur du plan comme combinaison de deux vecteurs non colinéaires,
utilisent la notation $\lambda\vec{u}$ et étudient graphiquement et par le calcul la colinéarité de deux vecteurs,
donnent les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées des points A et B,
donnent les coordonnées de la somme de deux vecteurs,
calculent les longueurs de vecteurs et la distance entre deux points dans le plan.</td></tr>
<tr><td>Droites dans le plan
formes réduites $y=ax+b$ ou $x=c$
équation cartésienne $ax+by+c=0$
forme paramétrique d'une équation de droite pour une droite dans le plan
position mutuelle de deux droites:
- droites sécantes ;
cas particulier : droites se coupant orthogonalement
- droites parallèles (strictement ou non)</td><td>Les élèves
donnent le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine à partir d’une équation de forme $y=ax+b$ d’une droite et interprètent ces notions,
déterminent l'équation réduite d'une droite à partir de deux points,
déterminent une équation cartésienne d’une droite à partir de deux points ou d'un point et d'un vecteur directeur,
tracent une droite en utilisant une équation cartésienne dans un repère orthonormé,
trouvent un vecteur directeur d’une droite à partir d'une équation cartésienne,
déterminent le vecteur de position $\overrightarrow{OX}$ de tout point X de la droite donnée par un point et un vecteur directeur,
déterminent une représentation paramétrique d’une droite dont deux points ou un point et un vecteur directeur sont connus,
passent d’une équation cartésienne (ou réduite) de droite à une représentation paramétrique et vice versa,
déterminent si deux droites sont parallèles (strictement ou non) ou si sécantes (notamment perpendiculaires),
déterminent le point d'intersection éventuel de deux droites.</td></tr>
<tr><td>Géométrie dans l’espace</td><td></td></tr>
</table>

• solides • aires et volumes des solides	Les élèves • représente les solides en perspective, • connaissent les sections planes de solides usuels (cube, pavé, prisme, cylindre, cône, boule, pyramide), • calculent les aires (latérales) et les volumes de solides usuels (cube, pavé droit, prisme, cylindre, cône, boule, pyramide).

Indications complémentaires

- L'introduction de vecteurs peut être réalisée de façon intra-mathématique ou en liaison avec des applications dans des contextes.
- Le calcul du point d'intersection de deux droites permet de revoir la résolution des systèmes d'équations linéaires.
- Les positions relatives entre droites et plans sont décrites géométriquement. Les calculs ne sont pas requis à ce stade.
- L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique pour l'illustration et la construction est un élément indispensable en géométrie plane et en géométrie dans l'espace.
- Pour les cylindres ou les cônes, on se limite aux sections par des plans perpendiculaires aux axes de ces solides.
- Les formules de calcul de la surface et du volume ont été étudiées au collège. Ce chapitre offre l'occasion de revoir et approfondir ces notions.

2.1.4 Statistiques et probabilités

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Statistiques descriptives • collecte et enregistrement des données, traitement de données, formes de représentation, diagrammes • fréquences absolues et relatives • médiane, quartiles, diagramme en boîte • moyenne arithmétique	Les élèves • collectent et enregistrent des données statistiquement, les organisent, les présentent clairement, les analysent et les interprètent, • déterminent les fréquences absolues et relatives, • calculent la moyenne arithmétique ou la médiane et les quartiles pour des ensembles de données donnés et les utilisent pour évaluer les données.
Probabilités • expérience aléatoire - issues de l'expérience aléatoire ω_1, ω_2, ... ω_n - ensemble de résultats Ω - fréquence d'une issue - loi empirique des grands nombres • événements - événements élémentaires - probabilité d'un événement	Les élèves • interprètent le concept de probabilité en relation avec des issues également probables comme fréquence relative stabilisée et résolvent des tâches et des problèmes connexes, • énoncent des ensembles de résultats d'expériences aléatoires simples et calculent la probabilité d'un événement (y compris l'événement opposé, l'événement et, l'événement ou), • créent des tableaux à double entrée et les utilisent pour déterminer les probabilités,

- les événements $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$ - probabilité de $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$ • distribution de probabilité • représentations d'expériences par un tableau à double entrée • expériences aléatoires dans lesquelles tous les événements élémentaires sont également probables (expériences de Laplace)	• décident et justifient si les expériences aléatoires sont des expériences de Laplace et calculent les probabilités de Laplace.

2.2 Classe de 1ère

2.2.1 Trigonométrie

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**

Notions de base de la trigonométrie
• cercle trigonométrique
  - mesure d'angle orienté
  - sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique
• radians
  - unité radian (1 rad)
  - longueur de l'arc
  - valeur principale
• relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
• équations trigonométriques
	Les élèves
	• tracent le point P correspondant à un angle α sur le cercle unité et spécifient $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ comme ordonnée et abscisse correspondantes du point P,
	• déterminent à l'aide du cercle trigonométrique les solutions des équations du type $\cos(x) = \cos(\alpha)$ et $\sin(x) = \sin(\alpha)$ et représentent les solutions sur le cercle unité,
	• déterminent la mesure en radians correspondante et la valeur principale dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ pour une mesure d'angle en degrés,
	• donnent la mesure en radians des angles particuliers sous forme de fractions ou de multiples de π,
	• déterminent la mesure de degré correspondante pour les mesures d'angle x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ en radians.

2.2.2 Analyse – autres fonctions usuelles

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**
dérivation • Dérivée d'une puissance de fonction dérivable • dérivées d'ordre supérieur	Les élèves • déterminent les dérivées d'ordre supérieur, • déterminent les dérivées de fonctions composées.
convexité • Convexité, concavité • Points d'inflexion	Les élèves • déterminent par le calcul et graphiquement les points d'inflexion et la convexité d'une fonction, • utilisent la convexité et les points d'inflexions pour l'étude de courbes de fonctions.

Fonctions trigonométriques
• Fonctions sinus et cosinus avec $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = cos(x)$:
  - ensemble de définition
  - ensemble de valeurs
  - période
  - racines
  - intervalles de variation
	Les élèves
	• énoncent les propriétés des fonctions sinus et cosinus et tracer leurs graphiques,
	• déterminent les valeurs de sinus ou de cosinus correspondantes pour un point x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ en utilisant les courbes représentatives des fonctions trigonométriques,

- propriétés de symétrie (centrale ou axiale) des courbes représentatives - représentation graphique - fonctions dérivées : $(sin(x))' = cos(x)$ $(cos(x))' = -sin(x)$ • Fonctions trigonométriques générales - $f(x) = a\sin(bx + c) + d$ - $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ avec $a, b \epsilon \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $c, d \epsilon \mathbb{R}$	• connaissent les valeurs de la fonction sinus et de la fonction cosinus pour $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$, • donnent les dérivées des fonctions trigonométriques, • décrivent l'influence des paramètres a, b, c et d de l'équation de fonction générale sur les graphiques des fonctions sinus et cosinus, • déterminent les valeurs des paramètres a, b, c et d pour des représentations graphiques données, • savent discuter de l'influence des paramètres par analogie avec les fonctions du second degré.
Fonctions rationnelles simples • Fonctions de la forme $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ bzw. $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ avec $a \epsilon \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $b, c \in \mathbb{R}$ - domaine de définition - symétrie (fonctions paires ou impaires) - limites - asymptote - racines - intervalles de variations - propriétés de symétrie - représentation graphique	Les élèves • déterminent l'ensemble de définition des fonctions rationnelles et les valeurs qui annulent la fonction, • décrivent la relation entre les courbes représentatives des fonctions f et g avec $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ ou $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. • étudient les propriétés des fonctions de la forme $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ ou $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ et esquissent leurs représentations graphiques.
Fonctions exponentielles • **fonction exponentielle naturelle de base e** - définition du nombre d'Euler e - définition de la fonction exponentielle avec $f(x) = e^x$ - propriétés de la fonction exponentielle (dérivée, sens de variation, convexité, limites, représentation graphique) • **fonctions composées** - produits de la fonction exponentielle avec des fonctions polynômes - comportement des fonctions avec $f(x) = x^n \cdot e^{cx}$ pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$ • **croissance exponentielle** - traits caractéristiques	Les élèves • énoncent les propriétés de la fonction exponentielles et esquissent sa représentation graphique, • étudient les fonctions composées de la fonction exponentielle et des fonctions polynômes, • déterminent le comportement des fonctions de la forme $f(x) = x^n \cdot e^{cx}$ pour $x \to +\infty$ ou pour $x \to -\infty$ et $n \in \mathbb{N}$, • donnent des exemples de croissance exponentielle et décrivent les différences entre la croissance exponentielle et linéaire.

- quotient constant $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ - limites	
Fonction logarithme • **fonction logarithme népérien, notée fonction ln** - définition - propriétés (dérivabilité et dérivée, primitives, variations, convexité, ensemble de valeurs, comportement pour $x \to +\infty$ ou $x \to 0^+$, représentation graphique) - propriétés fonctionnelles -	Les élèves • énoncent la définition de la fonction ln ainsi que ses propriétés et les propriétés fonctionnelles de base $\ln(x_1x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ $\ln(x^r) = r\ln(x)$. •

Contenu facultatif

Autres règles de dérivation • *règle du quotient*	*Les élèves* • *déterminent les dérivées en utilisant la règle du quotient.*
Fonctions rationnelles • *Fonctions rationnelles* - *ensemble de définition* - *symétrie (fonctions paires ou impaires)* - *limites* - *asymptote* - *racines* - *intervalles de variation* - *propriétés de symétrie* - *représentation graphique*	*Les élèves* • *étudient les propriétés des fonctions rationnelles.*
Fonctions exponentielles • ***fonctions composées*** - *quotients de la fonction exponentielle avec des fonctions polynômes*	*Les élèves* • *examinent les fonctions composées de la fonction exponentielle et des fonctions polynômes.*
Fonction logarithme • ***fonctions composées*** - produits de la fonction ln avec des fonctions polynômes - *quotients de la fonction ln avec des fonctions polynômes*	*Les élèves* • *étudient les fonctions composées de la fonction ln et des fonctions polynômes,* • déterminent le comportement des fonctions du type $f(x) = x^n \ln(x)$ pour $x \to +\infty$ ou $x \to 0^+$,

- comportement des fonctions avec $f(x) = x^n \ln(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$ pour $x \to +\infty$ ou $x \to 0^+$ • ***primitives des fonctions de la forme*** $\boldsymbol{f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$ *(intégration logarithmique)*	• *déterminent les primitives des fonctions de la forme* $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

Indivations

- En général, les fonctions rationnelles ne doivent pas comporter de dénominateurs trop complexes (au maximum de degré 2) ou de paramètres.
- La dérivée seconde est formellement obtenue en appliquant les règles de dérivation à la dérivée première. La signification géométrique de la dérivée seconde n'est abordée que lors de l'étude de la convexité.
- Les points d'inflexion sont déterminés uniquement en examinant le signe de la dérivée seconde.
- Des justifications telles que « les fonctions exponentielles croissent plus vite que les fonctions puissance » suffisent à déterminer le comportement limite aux bords du domaine. Une justification formelle des théorèmes limites n'est pas attendue.
- Une description qualitative du comportement de la fonction ln par rapport aux fonctions puissance est suffisante.
- Lorsqu'il s'agit de fonctions composées, on se limite à des exemples simples.
- La fonction ln peut être introduite comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Alternativement, une introduction comme $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ est possible – à condition que le calcul intégral ait déjà été introduit.

2.2.3 Analyse – Calcul intégral

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Intégrale et primitive • aires limitées pas des courbes • introduction de l'intégrale • propriétés de l'intégrale (linéarité, additivité des intervalles) • règles d'intégration • intégrale définie • primitives • théorème fondamental du calcul différentiel et intégral • applications de l'intégrale dans les calculs d'aire : - aire entre la courbe représentative d'une fonction et l'axe des abscisses - aire entre deux courbes représentatives de fonctions	Les élèves • explicitent les méthodes de détermination approximative de l'aire (par exemple, méthode des rectangles), • donnent la signification et les propriétés de l'intégrale, • explicitent le concept de primitive et donnent une primitive pour une fonction, • justifient qu'il existe pour une fonction plusieurs primitives qui diffèrent par des constantes additives, • calculent certaines intégrales à l'aide de la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, • déterminent des aires à l'aide du calcul intégral.

Indication

- Aucune preuve détaillée du théorème fondamental n’est nécessaire.

2.3 Terminale

2.3.1 Géométrie vectorielle – Principes de base[3]

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Vecteurs • Calcul vectoriel dans l'espace • Repères orthonormés dans l'espace • Colinéarité • Coplanarité	Les élèves • représentent des points et des représentants de vecteurs dans un repère orthonormé, • transfèrent les calculs vectoriels du plan vers l'espace, • représentent géométriquement la colinéarité de deux vecteurs ou la coplanarité de trois vecteurs, • vérifient mathématiquement la colinéarité de deux vecteurs ou la coplanarité de trois vecteurs.
Le produit scalaire dans le plan et dans l'espace • définition • propriétés • angle entre deux vecteurs • règles de calcul • norme d'un vecteur • orthogonalité de deux vecteurs • applications du produit scalaire : - calcul des mesures d'angle - calcul de longueurs de segment	Les élèves • calculent des produits scalaires, • appliquent les règles de calcul du produit scalaire, • calculent les normes de vecteurs, • prouvent l'orthogonalité de deux vecteurs en utilisant le produit scalaire, • calculent des mesures d'angle et des longueurs de segment à l'aide du produit scalaire.
Le produit vectoriel • définition	Les élèves • déterminent un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés à l'aide du produit vectoriel.

Contenu facultatif

Le produit vectoriel • *applications du produit vectoriel* - *détermination de l'aire d'un parallélogramme et d'un triangle* - *détermination d'un vecteur normal à un plan*	*Les élèves* • *calculent l'aire d'un parallélogramme et d'un triangle à l'aide du produit vectoriel,* • *déterminent un vecteur normal à un plan.*

Indication

- Le produit vectoriel ne doit être utilisé que comme aide au calcul.

[3] Dans ce qui suit, les repères sont orthonormés.

2.3.2 Géométrie vectorielle – Objets dans l'espace [4]

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Droites dans l'espace • représentation des droites dans l'espace - à partir de deux points - représentation paramétrique vectorielle	Les élèves • établissent une équation paramétrique d'une droite et expliquent pourquoi elle n'est pas unique, • représentent des droites dans un système de coordonnées, • vérifient mathématiquement si un point donné se trouve sur une droite.
Plans dans l'espace • représentation d'un plan dans l'espace - à partir de trois points - représentation paramétrique vectorielle avec deux vecteurs non colinéaires - équation cartésienne avec un vecteur normal - équation cartésienne	Les élèves • établissent des équations de plan et les utilisent dans différents contextes • vérifient par le calcul si un point donné se situe dans un plan, • passent d'une représentation de plan à une autre.
Positions relatives et angles • Position relative : - de deux droites, - d'une droite et d'un plan - de deux plans • angle entre : - deux droites - deux plans	Les élèves • décrivent les positions relatives entre les objets donnés, • étudient par le calcul les positions relatives entre les objets donnés, • déterminent les angles entre les objets donnés.
Distances • Distance entre un point et : - un plan - une droite	Les élèves • calculent les distances entre les objets donnés.

Contenus facultatifs

Le cercle dans le plan • *équation cartésienne d'un cercle* • *équation vectorielle d'un cercle*	*Les élèves* • *décrivent des cercles dans le plan à l'aide d'équations,* • *passent d'une représentation en une autre.*

[4] Dans ce qui suit, les repères sont orthonormaux.

Distances • *distance entre des droites parallèles* • *distance entre une droite et un plan qui lui est parallèle* • *distance entre deux plans parallèles*	*Les élèves* • *calculent les distances.*
Applications complexes • *Symétrique d'un point par rapport à* - *un point* - *un plan* • *Volumes du pavé et de la pyramide*	*Les élèves* • *calculent les coordonnées des points miroirs,* • *calculent les volumes des pavés et des pyramides,* • *démontrent des propriétés géométriques (par exemple, carré, triangle isocèle, …)*

Indication

- L'examination de positions relatives offre la possibilité d'établir et de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

2.3.3 Statistiques et probabilités

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Expériences aléatoires à plusieurs étapes • arbre de probabilités • règles de calcul - règle du produit - règle de la somme • arbre de probabilités tronqué	Les élèves • pour les expériences aléatoires à n étapes, donnent les résultats sous forme de n-uplets, • représentent des expériences aléatoires à plusieurs étapes à l'aide d'arbres de probabilités, • calculent les probabilités dans des expériences aléatoires à n étapes.
Probabilité conditionnelle et indépendance • probabilité conditionnelle • indépendance de deux événements • théorème des probabilités totales	Les élèves • modélisent une situation donnée avec des probabilités conditionnelles et utilisent à bon escient la notation $\mathrm{P_A(B)}$, • représentent une situation de contexte concret à l'aide d'un arbre pondéré d'un tableau à double entrée 2x2. • calculent la probabilité d'un événement en utilisant le théorème des probabilités totales sous la forme $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$.
Combinatoire • modèles d'urnes avec et sans respect de l'ordre : - tirage avec remise	Les élèves

- tirage sans remise - permutations de k objets - tirage simultané de k objets pris parmi n • règles de calcul : factorielle, nombre d’arrangements, nombre de combinaisons (coefficient binomial)	• appliquent les règles de calcul de la combinatoire et les utilisent pour résoudre des tâches dans des contextes concrètes.

Loi binomiale • expériences de Bernoulli, schéma de Bernoulli, loi binomiale • fonction de répartition • espérance et variance d'une loi binomiale	Les élèves • décident et justifient si les variables aléatoires peuvent être modélisées à l'aide d'une loi binomiale, • explicitent à l'aide d'un arbre que les coefficients binomiaux indiquent le nombre de chemins réalisant k succès en n essais, • calculent les probabilités et les probabilités cumulées en utilisant la loi binomiale à l'aide d'un outil numérique (calculatrice, logiciel) • calculent et interprètent l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire binomiale.

Contenus facultatifs

Approximation des lois binomiales par la distribution normale • *normalisation d'une variable aléatoire distribuée binomiale* • *calcul approximatif des probabilités en utilisant la loi normale standard*	*Les élèves* • *affirment qu'une loi binomiale pour $\sigma > 3$ peut être approximée par une loi normale,* • *normalisent une variable aléatoire X distribuée binomialement par $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$,* • *calculent les probabilités approximatives pour la variable aléatoire standardisée Z à l'aide d'outils mathématiques numériques ou de valeurs tabulaires de la distribution normale standard.*
Tests d'hypothèses • *hypothèse nulle* • *hypothèse alternative* • *règles de décision* • *erreurs de type 1 et 2* • *probabilité d'erreur*	*Les élèves* • *effectuent des tests d'hypothèses en utilisant des lois binomiales,* • *formulent l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 sur la base de dispositions de test données et déterminent les zones critiques, les règles de décision et les erreurs de type 1 et de type 2.*

Indications

- Un concept axiomatique de probabilité n'est pas prévu.
- Pour la combinatoire, on se limite à des situations permettant des calculs combinatoires simples.
- La formalisation théorique du théorème des probabilités totales n'est pas un attendu, mais les élèves doivent savoir appliquer la formule.

3 Verbes consignes

Verbes	Définitions
indiquer, nommer	Formuler les résultats numériquement ou verbalement, sans présenter la méthode de résolution et sans justification
justifier	Vérifier ou falsifier une affirmation ou un fait par calcul, selon des règles d'inférence valables, par dérivation ou par argumentation substantielle
calculer	Obtenir des résultats à partir d'une approche ou d'une formule en effectuant des calculs
déterminer, investiguer	Le type de procédure peut être choisi librement – sauf indication contraire par un ajout (par exemple, application de méthodes informatiques ou graphiques). La procédure doit être présentée.
décrire	Décrire un fait ou une procédure avec vos propres mots en utilisant des phrases complètes et une terminologie technique correcte. Une justification de la description n'est pas nécessaire.
juger	Le jugement à rendre doit être motivé.
prouver, montrer	Vérifier les énoncés à l'aide de théorèmes mathématiques connus, de conclusions logiques et de transformations d'équivalence et en observant des critères formels
analyser, interpréter	L'analyse ou l'interprétation établit un lien, par exemple entre une représentation graphique, un terme ou le résultat d'un calcul et un contexte factuel donné.
induire	Extraire des données à partir de représentations données pour répondre à des questions ou pour un traitement ultérieur
décider	Aucune justification n'est nécessaire pour la décision.
expliciter	Présenter et illustrer des faits sur la base de connaissances préalables de manière à ce qu'ils deviennent compréhensibles
représenter graphiquement, dessiner	Reproduire des objets mathématiques sous une forme standard ou prescrite, les représenter graphiquement : produire une représentation graphique précise en caractères basée sur la reproduction exacte de points essentiels ou une représentation graphique à l'échelle réelle ou fidèle d'un objet
esquisser	Le croquis doit être préparé de manière à décrire graphiquement les éléments essentiels du contexte considéré.
vérifier	Vérifier ou falsifier un fait donné en appliquant des règles ou des connaissances mathématiques dans une situation ouverte
étudier	Explorer les faits, les problèmes et les questions de manière ciblée selon des critères spécifiques, courants sur le plan professionnel ou raisonnables
comparer	Identifier les similitudes et les différences
utiliser, exploiter, traiter	Relier des termes techniques, des règles, des théorèmes mathématiques, des relations ou des procédures à un autre sujet
attribuer	Établir un lien justifié entre des objets ou des représentations

2025

Lehrplan / Programme

DFG / LFA

Mathematik / Mathématiques

Gemeinsames Fach / Enseignement commun

Klassenstufen 10, 11 und 12 / Classes de 2nde, 1ère et Terminale

Inhaltsverzeichnis

1. Leitgedanken

1.1. Bildungsziele

Der Mathematikunterricht fördert maßgeblich die Persönlichkeitsentwicklung junger Menschen durch das Vermitteln von Methodenkompetenz, Sachwissen und inneren Haltungen und stärkt so die vernunftbetonte Selbstbestimmung. Hiermit leistet der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag zu einer vertieften Allgemeinbildung.

Schulische Mathematikkenntnisse sind somit wesentlicher Bestandteil der allgemeinen Studierfähigkeit und bilden die fachlichen Grundlagen für diejenigen jungen Menschen, die nach der Schule ein durch mathematische Denkweisen geprägtes Studium oder Berufsfeld wählen. Neben den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächern sind dies heute verstärkt auch Arbeitsgebiete im wirtschaftlichen und sozialwissenschaftlichen Bereich.

Die Fähigkeit, Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen, ist aber auch ein eigenständiger intellektueller Wert und stellt einen wichtigen Beitrag der Mathematik zu unserer Kultur dar. Die im Mathematikunterricht angebahnten Kompetenzen ermöglichen eine kritische Wertung von gesellschaftlichen Entwicklungen und leitet zu verantwortungsbewusstem Handeln an.

Einblicke in die verschiedenen länderspezifischen Lehrtraditionen tragen zu einem weiteren Ausbau deutsch-französischer interkultureller Kompetenzen bei.

1.2. Zielsetzungen

Ein allgemeinbildender Mathematikunterricht soll unter anderem

- den Schülerinnen und Schülern die Mathematik als anwendungsbezogene, alltagsrelevante sowie beweisende, deduzierende und experimentelle Wissenschaft näherbringen,
- Kreativität und Fantasie fördern,
- Schülerinnen und Schüler befähigen Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen,
- den Schülerinnen und Schülern die kulturelle, historische und philosophische Entwicklung der Mathematik aufzeigen,
- als Übungsfeld für Arbeitstechniken sowie Entwicklungsfeld von kognitiven Strategien dienen,
- Vernetzungen zwischen den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik und mit anderen Wissenschaften verdeutlichen,
- zur allgemeinen Studierfähigkeit beitragen.

Daher ergeben sich für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht unter anderem die folgenden Ziele.

A- <u>Kognitive und prozedurale Kompetenzen</u>[1]

Ganz allgemein sollen die Schülerinnen und Schüler fähig sein

- Situationen aus der Realität zu modellieren und vorliegende Modelle zu validieren oder zu verwerfen (Modellieren),
- Teilergebnisse zu finden und in Beziehung zu setzen, Beweise und Begründungen durchzuführen (Argumentieren und Beweisen),
- geeignete Hilfsmittel zur Problemlösung zu suchen, auszuwählen und einzusetzen – auch mithilfe von Softwaretools (Probleme lösen),
- sich über Mathematik, die Ergebnisse und Wege von Lösungen sowohl mündlich als auch schriftlich auszutauschen (Kommunizieren),
- Informationen aus Darstellungen zu entnehmen und umgekehrt Ergebnisse geeignet darzustellen,

[1] Der vorliegende Lehrplan berücksichtigt die in den Bildungsstandards zur allgemeinen Hochschulreife für das Fach Mathematik formulierten prozessbezogenen, allgemein-mathematischen Kompetenzen, ohne eine explizite Kennzeichnung und Zuordnung zu diesen vorzunehmen.

- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen (berechnen, Techniken anwenden und umsetzen).

B- Digitale und technische Kompetenzen

Durch den Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen wie grafikfähigem Taschenrechner (GTR), dynamischer Geometriesoftware, Tabellenkalkulationsprogrammen oder Künstlicher Intelligenz können Lehr- und Lernprozesse unterstützt, bereichert und neu strukturiert werden. Diese Medienkompetenz ist bei der Unterrichtsgestaltung immer mitzudenken, wird aber nicht immer im Lehrplan ausgewiesen.

C- Selbstmanagement-, Orientierungs- und Teamkompetenzen

Der Unterricht fördert das entdeckende Lernen. Die Ausbildung heuristischer Strategien beim Experimentieren und Probieren befähigt die Schülerinnen und Schüler, Beziehungen und Strukturen zu entdecken und sie zu analysieren.
Er versetzt die Schülerinnen und Schüler in die Lage, aus einer Menge von Informationen die für eine anstehende Aufgabe wesentlichen Informationen herauszufiltern.
Der Unterricht leitet die Schülerinnen und Schüler sowohl zum selbstständigen als auch zum kooperativen Lernen an. Er trägt zur Entwicklung von Selbstbewusstsein und Selbstdisziplin, von Leistungsbereitschaft und Konzentrationsfähigkeit bei.

D- Bürgerliche und demokratische Kompetenzen

Der Unterricht stärkt und erweitert das Kommunikationsvermögen. Mathematische Sachverhalte werden mündlich und schriftlich dargestellt oder graphisch veranschaulicht. Das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen, das Formalisieren und das algorithmische und kalkülhafte Arbeiten sind spezifische Formen des mathematischen Ausdrucks. Die Beherrschung der Fachsprache öffnet den Zugang zu vielen Disziplinen, insbesondere den naturwissenschaftlichen, technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Fächern.
Der Unterricht erzieht zu begrifflicher Präzision; er vermittelt die Fähigkeit, Aussagen exakt zu formulieren und logische Schlussfolgerungen zu ziehen. Er fördert die Bereitschaft und die Kompetenz zum Argumentieren und Kritisieren. Er verwendet verschiedene Stufen des Argumentierens, vom beispielgebundenen Verdeutlichen bis zum formalen Beweisen.
Der Unterricht gibt exemplarisch Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Gesellschaft.

E- Deutsch-französische, europäische und internationale Kompetenzen

Der vollständig integrierte Unterricht in den Klassenstufen 10 bis 12 an den Deutsch-Französischen Gymnasien bedeutet für einen Teil der Schülerinnen und Schüler in nichtsprachlichen Fächern immer, dass die Partnersprache als Unterrichtssprache genutzt wird. „Der Einsatz der Fremdsprachen als Arbeitssprachen intensiviert fachliches und sprachliches Lernen und dient der Vorbereitung auf die zunehmende Internationalisierung in Ausbildung, Studium und Berufsleben.“[2] In diesem Sinne wird durch die Bewusstmachung zum einen sprachlicher Prozesse und zum anderen je nach Lehrtradition unterschiedlicher Herangehensweisen an fachliche Fragestellungen das Verständnis für die Partnerkultur befördert.

1.3. Methodische Herausforderungen

Nachhaltige und dauerhafte Lernerfolge setzen eine sorgfältige Auswahl und Variation methodischer Vorgehensweisen voraus. Zu beachten ist insbesondere:

- Der Unterricht trägt zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen zu wesentlichen fachlichen Inhalten und Strategien bei.
- Der Unterricht widmet dem Vernetzen der Inhalte und dem Herstellen von Querbezügen auch zu anderen Fächern besondere Aufmerksamkeit und ermöglicht so Phasen des systematischen Wiederholens.

[2] “Empfehlungen der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der Fremdsprachenkompetenz” Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2011;
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2011/2011_12_08-Fremdsprachenkompetenz.pdf

- Im Unterricht kann der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und Medien den Zugang zu mathematischen Inhalten erleichtern.
- Der Unterricht befasst sich verstärkt mit Aufgabenstellungen oder Lernumgebungen, die einem situativen Kontext entspringen, wobei auch ergebnisoffene Formulierungen gewählt werden.

In weiten Teilen des Alltagslebens und in nahezu allen Bereichen des Berufslebens, in denen höher qualifizierte Tätigkeiten ausgeübt werden, ist es von Bedeutung, quantitative Zusammenhänge und abstrakte Strukturen zu erfassen und weiter zu bearbeiten. Dabei kommen verstärkt heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren zum Tragen, die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen. Gerade der Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen wie grafikfähige Taschenrechner (GTR), dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulationsprogramme oder Künstlicher Intelligenz macht es häufig nötig, die zu Grunde liegenden mathematischen Methoden zu verstehen, da es nur so gelingen kann, Möglichkeiten und Grenzen dieser Hilfsmittel zu beurteilen und sie sinnvoll einzusetzen. Dies beinhaltet die kritische Auseinandersetzung insbesondere mit Ergebnissen, die mittels Künstlicher Intelligenz erhalten wurden.

Es erscheint sinnvoll, verschiedene Inhalte und Kompetenzen zu vernetzen und in anderen Zusammenhängen immer wieder aufzugreifen, sodass ein spiralförmiges vertiefendes Lernen möglich wird.

Zusätzlich muss speziell in Klassenstufe 10 genügend Zeit für die Zusammenführung der deutsch-französischen Schülerschaft gegeben werden. Hier werden unterschiedliche Herangehens-, Sprech- und Schreibweisen thematisiert, Grundlagen werden angeglichen und gefestigt. Die Zusammenführung kann zu Beginn von Klasse 10 in einem größeren Block erfolgen.

1.4. Leistungsbewertung

Die Leistungsbewertung erfolgt zum einen im Rahmen einer lernprozessbezogenen Leistungsbewertung unter Einbezug der Leistungen aus dem Unterricht.
Zum anderen dienen schriftliche Arbeiten der Beurteilung von und Rückmeldung zu im Unterricht erworbenen Kompetenzen bezüglich im Unterricht behandelter Themen und Lerngegenstände. Als Orientierung für die Konstruktion von Aufgaben dient die Beschreibung von Anforderungsbereichen. Mit ihrer Hilfe und nach Maßgabe des Lehrplans sollen Aufgaben zur Leistungsmessung formuliert werden. Dabei muss es Ziel der Leistungsmessung sein, das Leistungsvermögen der Prüflinge möglichst differenziert zu erfassen.

Die Berücksichtigung von **Anforderungsbereichen** trägt wesentlich dazu bei, ein ausgewogenes Verhältnis der Anforderungen zu erreichen, die Vergleichbarkeit von Aufgaben zu erhöhen sowie die Bewertung von Leistungen transparent zu machen. Im vorliegenden Lehrplan wird auf eine explizite Ausweisung von Anforderungsbereichen in den einzelnen Themenfeldern verzichtet.

Der **Anforderungsbereich I (Reproduzieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit geringerem Komplexitätsgrad wie

- die Wiedergabe von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Der **Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit mittlerem Komplexitätsgrad wie

- das selbstständige Auswählen, Anordnen und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Üben bekannten Zusammenhang und ähnlich zu Vorgehensweisen im Unterricht,
- das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen geht.

Der **Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit höherem Komplexitätsgrad wie

- das planmäßige und kreative Bearbeiten komplexer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- das bewusste und selbstständige Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung neuer Problemstellungen.

2 Fachliche Inhalte und Kompetenzen

Der Lehrplan ist nach einzelnen Lernbereichen gegliedert. In zwei Spalten werden jeweils der verbindliche Inhalt und die verbindlichen zu erwartenden Kompetenzen aufgeführt. Die Zuordnung der erwarteten Kompetenzen zu den Inhalten schließt nicht aus, dass weitere Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern erworben werden können.

Die Reihenfolge der einzelnen Themen ist innerhalb der angegebenen Klassenstufe nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Darüber hinaus nimmt sie aber die didaktisch-methodischen Entscheidungen der Lehrkraft bzw. der Fachkonferenzen Mathematik nicht vorweg.

2.1 Klassenstufe 10

2.1.1 Algebra

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Zahlenmengen • Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ • Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ • Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$ • Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$ • Intervalle **Anordnung** • Ungleichungen • lineare Ungleichungen mit einer Unbekannten • absoluter Betrag	Die Schülerinnen und Schüler • wenden die Begrifflichkeiten und Schreibweisen der besonderen Zahlenmengen und von Intervallen (Schnitt, Vereinigung, Teilmenge, offene und geschlossene Intervalle) an, • bestimmen Lösungen von Ungleichungen mithilfe von Termumformungen, beidseitiger Addition oder Subtraktion eines Terms, beidseitiger Multiplikation mit einer Zahl oder Division durch eine Zahl ungleich 0, • bestimmen Lösungen von Ungleichungen, bei denen bei den Lösungsschritten Kehrwert, Wurzel, Quadrat oder Potenz gebildet werden muss, • lösen Produktungleichungen und Bruchungleichungen mit Hilfe einer Vorzeichentabelle, • lösen Gleichungen mit absolutem Betrag.
Terme und Funktionen zweiten Grades • Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ • Gleichungen zweiten Grades • Scheitelpunktform • Vorzeichenuntersuchungen • graphische Darstellung von Funktionen zweiten Grades	Die Schülerinnen und Schüler • lösen quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit Hilfe der Diskriminante oder durch Faktorisierung, • faktorisieren einfache quadratische Terme, wenn die Termstruktur es zulässt, • bestimmen mit Hilfe der Scheitelpunktform die Koordinaten des Scheitelpunktes • zeichnen das Schaubild einer quadratischen Funktion mithilfe der Scheitelpunktform, • beschreiben den Verlauf des Graphen einer quadratischen Funktion in Abhängigkeit vom Parameter a und der Diskriminante, • lösen Ungleichungen zweiten Grades.

Polynome • Definition (Grad, Koeffizienten) • Nullstellen • Gleichheit von Polynomen • Faktorisierung von Polynomen vom Grad ≤ 3 (unter der Annahme, dass eine Lösung bekannt ist)	Die Schülerinnen und Schüler • schließen anhand der Termstruktur auf Eigenschaften des Polynoms und bestimmen Polynome mit bestimmten Eigenschaften, • faktorisieren Polynome durch Ausklammern, wenn dies möglich ist, oder Polynomdivision, wenn eine Nullstelle bekannt ist, • bestimmen den Verlauf einer Polynomfunktion, deren Term faktorisierbar ist (Gebietseinteilung).

Fakultative Inhalte

Anordnung • *absoluter Betrag*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *lösen Ungleichungen mit absolutem Betrag.*
Polynome • *Vorzeichenuntersuchungen*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *lösen Ungleichungen mit Polynomen (höchstens 4. Grades).*

Hinweis

- Das Lösen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann mit dem Satz von Vieta erfolgen.

2.1.2 Analysis

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Funktionen • Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion • gerade und ungerade Funktion • Monotonieverhalten • Graph der Funktion • Extrema: - global, lokal - Maximum, Minimum - Maximum-, Minimumstelle - Hoch-, Tiefpunkt des Graphen	Die Schülerinnen und Schüler • nennen anhand des Graphen Symmetrieeigenschaften einer Funktion und fertigen eine Vorzeichentabelle an, • geben anhand des Graphen die Monotonieintervalle der Funktion an, fertigen eine Monotonietabelle an, • lösen Gleichungen der Form $f(x) = m$ und Ungleichungen der Form $f(x) < m$ graphisch, • geben anhand des Graphen die Extrema und die Extremstellen einer Funktion sowie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkten des Graphen an.

Grundfunktionen • Funktionen 1. Grades • quadratische Funktionen • Wurzelfunktion • Kehrwertfunktion • Betragsfunktion • kubische Funktion	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben das Monotonieverhalten der Grundfunktionen und fertigen entsprechende Vorzeichentabellen dieser Funktionen an, • skizzieren die Graphen der Grundfunktionen und schließen umgekehrt aus der Darstellung eines Graphen auf die zugrundeliegende Grundfunktion, • erzeugen, ausgehend von einer Funktion f, neue Funktionen durch einfache Transformationen von Grundfunktionen wie $g(x) = f(x) + c$, $g(x) = a \cdot f(x)$ und $g(x) = f(x + b)$ und zeichnen die Graphen der neuen Funktionen.
Grenzwerte • Grenzwerte von Funktionen im Unendlichen • Grenzwerte von Funktionen an einer Stelle	Die Schülerinnen und Schüler • ermitteln mithilfe eines digitalen Mathematikwerkzeugs Grenzwerte grundlegender Funktionen sowie Grenzwerte von Summen, Produkten und Quotienten dieser Funktionen.

Stetigkeit
• Definition der Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle
• Stetigkeit im Intervall
• Sätze für stetige Funktionen auf Intervallen:
  - Zwischenwertsatz
  - Nullstellensatz
	Die Schülerinnen und Schüler
	• erläutern die Begriffe „Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle bzw. in einem Intervall“ anschaulich anhand des Graphen,
	• untersuchen ausgewählte abschnittsweise definierte Funktionen anhand des Graphen auf Stetigkeit,
	• erläutern die anschauliche Bedeutung der Stetigkeitssätze und wenden diese zur Problemlösung an.

Ganzrationale Funktionen	Die Schülerinnen und Schüler
	• identifizieren ganzrationale Funktionen und bestimmen das Verhalten ganzrationaler Funktionen im Unendlichen ($x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$),
	• bestimmen die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion und zerlegen den Funktionsterm in Linearfaktoren:
	  ○ ermitteln der Nullstellen bei Funktionstermen in faktorisierter Form unter Verwendung des „Nullproduktsatzes“. (Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist.)
	  ○ begründen, dass das Polynom genau dann ohne Rest durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ teilbar ist, wenn x_0 eine Nullstelle des Polynoms ist,
	  ○ bestimmen der faktorisierten Form eines Polynoms höchstens dritten Grades mittels Polynomdivision,
	  ○ erläutern, dass die Anzahl der Nullstellen den Grad n des Polynoms nicht übersteigen kann.

<table>
<tr>
<td>

Ableitung

- Differenzierbarkeit einer Funktion
  - an einer Stelle
  - in einem Intervall
- Tangente an den Graphen von f
- Ableitungsfunktion f'
- Ableitungsfunktionen der Grundfunktionen mit:
  - $f(x) = c$
  - $f(x) = x$
  - $f(x) = x^2$
  - $f(x) = \frac{1}{x}$
  - $f(x) = \sqrt{x}$
  - $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$
- Ableitungsregeln
  - Faktorregel
  - Summenregel
  - Potenzregel
-

</td>
<td>

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern den Begriff „Differenzierbarkeit“ anschaulich anhand von Graphen,
- verwenden die Formulierung „ f heißt differenzierbar an der Stelle x_0“ sowie die Schreibweise $f'(x_0)$ sachgerecht,
- erläutern die geometrische Bedeutung als Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0|f(x_0))$,
- zeichnen die Tangente in einem Punkt des Graphen mit bestimmter Steigung,
- ordnen begründet verschiedenen Funktionsgraphen entsprechende Graphen der Ableitungsfunktionen zu und umgekehrt,
- bestimmen die Ableitungsfunktionen der Grundfunktionen,

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Ableitungsfunktionen

- Monotonieintervalle: Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der Ableitungsfunktion und dem Monotonieverhalten der Funktion
- Extremstellen:
  - Lokale Minimum-/Maximumstelle
  - lokales Minimum/Maximum notwendige Bedingung $f'(x_0) = 0$
  - hinreichende Bedingung
- Anwendung der Differenzialrechnung:
  - Funktionsanpassungen
  - Modellierung geeigneter Situationen und Vorgänge im Alltag

</td>
<td>

Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen rechnerisch die Monotonieintervalle einer Funktion und erstellen eine Monotonietabelle,
- bestimmen rechnerisch lokale Extremstellen von Funktionen sowie die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkten von Funktionsgraphen,
- ermitteln Terme von ganzrationalen Funktionen (höchstens 4. Grades) mit vorgegebenen Eigenschaften,
- modellieren geeignete Situationen und Vorgänge im Alltag.

</td>
</tr>
</table>

Fakultative Inhalte

Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Ableitungsfunktionen • *Extremwertaufgaben*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *lösen Extremwertaufgaben.*

Hinweise

- Auf eine formale Grenzwertbetrachtung wird verzichtet. Die Grenzwertbetrachtungen sollen rein intuitiv und mit Hilfe des Taschenrechners erfolgen.
- An eine ausführliche, bewiesene Einführung und Anwendung des Stetigkeitsbegriffs ist nicht gedacht; die Behandlung der Stetigkeit soll eher qualitativen Charakter haben.
- Die Einführung des Ableitungsbegriffs kann z. B. als momentane Änderungsrate einer Funktion erfolgen. Konkrete Sachsituationen erleichtern das Verständnis für diesen Zugang.
- Man beschränke sich beim Ableiten auf einfache Funktionen, sodass der Kern des Ganzen nicht durch einen hohen Rechenaufwand verdeckt wird.
- Im Hinblick auf die Verwendung in den anderen naturwissenschaftlichen Fächern ist auch die Verwendung anderer Variablenbezeichnungen (x, t, s etc.) hilfreich.
- Die Funktionsuntersuchungen sollen sich auf ganzrationale Funktionen beschränken, auch wenn Beispiele anderer Funktionstypen in Aufgaben vorkommen können.

2.1.3 Geometrie [3]

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Vektoren in der Ebene • Verschiebungsvektoren • Ortsvektoren ($\overrightarrow{OM}$ für einen Punkt M) • Gleichheit von Vektoren • Addition von Vektoren (Regel von Chasles: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$) • Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl • Kollinearität von Vektoren • Darstellung von Vektoren im kartesischen Koordinatensystem • Länge eines Vektors	Die Schülerinnen und Schüler • begründen den Satz: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; ABCD$ ist ein Parallelogramm, • stellen die Summe zweier Vektoren geometrisch dar, • stellen einen Vektor der Ebene durch zwei nicht kollineare Vektoren dar, • verwenden die Schreibweise $\lambda\vec{u}$ und untersuchen graphisch sowie rechnerisch die Kollinearität zweier Vektoren, • geben die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ aus den Koordinaten der Punkte A und B an, • geben die Koordinaten der Summe zweier Vektoren an, • bestimmen rechnerisch die Längen von Vektoren und den Abstand zweier Punkte der Ebene.

[3] Im Folgenden beziehen sich alle Vorgaben auf geometrische Objekte in kartesischen Koordinatensystemen.

Geraden in der Ebene • explizite Formen $y = ax + b$ (Normalform) oder $x = c$ • implizite Form $ax + by + c = 0$ (allgemeine Geradengleichung) • Parameterform einer Geradengleichung zu einer Gerade in der Ebene • gegenseitige Lage zweier Geraden: - sich schneidende Geraden; Sonderfall: sich orthogonal schneidende Geraden - parallele Geraden (echt parallel oder identisch)	Die Schülerinnen und Schüler • geben anhand einer Geradengleichung der Form $y = ax + b$ den y-Achsenabschnitt und die Steigung an und interpretieren diese Begriffe, • bestimmen aus zwei Punkten eine explizite Form der Geradengleichung, • bestimmen aus zwei Punkten oder einem Punkt und einem Richtungsvektor eine allgemeine Form der Geradengleichung, • zeichnen anhand einer Geradengleichung die Gerade in einem kartesischen Koordinatensystem, • geben anhand einer allgemeinen Geradengleichung einen Richtungsvektor an, • bestimmen den Ortsvektor $\overrightarrow{OX}$ eines beliebigen Punktes X der Geraden, die durch einen Stützpunkt und einen Richtungsvektor gegeben ist, • bestimmen zu einer Gerade, von der zwei Punkte oder ein Punkt und ein Richtungsvektor bekannt sind, eine Geradengleichung in Parameterform • wandeln eine Geradengleichung in impliziter (bzw. expliziter) Form in eine Parameterform um und umgekehrt, • untersuchen, ob zwei Geraden parallel (echt parallel oder identisch) sind, oder ob sie sich (senkrecht) schneiden, • bestimmen den Schnittpunkt zweier Geraden.
Geometrie im Raum • Körper • Oberfläche und Volumen von Körpern	Die Schülerinnen und Schüler • zeichnen Körper perspektivisch, • geben die Schnittgebilde der üblichen Körper (Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Kegel, Kugel, Pyramide) mit einer Ebene an, • berechnen Oberflächeninhalte und Volumina der üblichen Körper (Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Kegel, Kugel, Pyramide).

Hinweise

- Die Einführung der Vektoren kann sowohl innermathematisch als auch anwendungsbezogen erfolgen.
- Die Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden erlaubt eine Wiederholung der Betrachtung der Lösungsvielfalt linearer Gleichungssysteme.
- Bei der Betrachtung der möglichen Lagebeziehungen von Gerade und Ebene genügt es, lediglich die räumlichen Beziehungen der Objekte zueinander zu beschreiben. Rechnungen sind an dieser Stelle nicht erforderlich.
- Die Verwendung von dynamischer Geometriesoftware zur Veranschaulichung und Konstruktion ist ein unverzichtbares Element in der ebenen Geometrie und der Raumgeometrie.

- Für die Zylinder oder Kegel sollen nur Schnittebenen senkrecht zu den Achsen der Körper betrachtet werden.
- Die Formeln zur Berechnung der Oberfläche und des Volumens sollten aus dem Unterricht der Mittelstufe bekannt sein. Dies bietet die Gelegenheit zur Wiederholung und zu Aufgaben größeren Schwierigkeitsgrades.

2.1.4 Statistik und Wahrscheinlichkeit

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Beschreibende Statistik • Datenerhebung und -erfassung, Umgang mit Daten, Darstellungsformen, Diagramme • absolute und relative Häufigkeiten • Median, Quartile, Boxplot • arithmetischer Mittelwert	Die Schülerinnen und Schüler • erheben und erfassen Daten statistisch, ordnen diese an, stellen sie übersichtlich dar, analysieren und interpretieren sie, • bestimmen absolute und relative Häufigkeiten, • berechnen zu vorgegebenen Datensätzen den arithmetischen Mittelwert bzw. den Median und die Quartilen und bewerten die Daten damit.
Wahrscheinlichkeiten • Zufallsexperiment - Ergebnisse des Zufallsexperiments $\omega_1, \omega_2, ...\omega_n$ - Ergebnismenge Ω - relative Häufigkeit eines Ergebnisses - Empirisches Gesetz der großen Zahlen • Ereignisse - Elementarereignisse - Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses - die Ereignisse $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$ - Wahrscheinlichkeit für $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$ • Wahrscheinlichkeitsverteilung • Vierfeldertafel • Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind (Laplace-Experimente)	Die Schülerinnen und Schüler • interpretieren den Begriff der Wahrscheinlichkeit im Zusammenhang mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen als stabilisierte relative Häufigkeit und lösen damit zusammenhängende Aufgaben und Probleme, • geben Ergebnismengen von einfachen Zufallsexperimenten an und berechnen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (auch die des Gegenereignisses, des Und-Ereignisses, des Oder-Ereignisses), • erstellen Vierfeldertafeln und bestimmen damit Wahrscheinlichkeiten, • entscheiden begründet, ob Zufallsexperimente Laplace- Experimente sind und berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten.

2.2 Klassenstufe 11

2.2.1 Trigonometrie

Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**

Grundlagen der Trigonometrie • Einheitskreis - orientiertes Winkelmaß - Sinus und Kosinus am Einheitskreis • Bogenmaß - Einheit Radiant (1 rad) - Bogenlänge - Hauptwert • trigonometrischer Pythagoras $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ • trigonometrische Gleichungen	Die Schülerinnen und Schüler • zeichnen den zu einem Winkel α zugehörigen Punkt P auf dem Einheitskreis und geben $sin(\alpha)$ und $cos(\alpha)$ als entsprechende y- und x-Koordinaten des Punktes P an, • bestimmen am Einheitskreis Lösungen von Gleichungen vom Typ $cos(x) = cos(\alpha)$ und $sin(x) = sin(\alpha)$ und stellen die Lösungen am Einheitskreis dar, • bestimmen zu einem Winkelmaß im Gradmaß das entsprechende Bogenmaß und den Hauptwert im Intervall $]-\pi; \pi]$, • geben das Bogenmaß besonderer Winkel als Bruchteile bzw. Vielfache von π an, • bestimmen zu Winkelmaßen x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ im Bogenmaß das entsprechende Gradmaß.

2.2.2 Analysis – weitere Funktionsklassen

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Ableitungen • Produktregel • Höhere Ableitungen	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen höhere Ableitungen, • bestimmen Ableitungen zusammengesetzter Funktionen.
Krümmungsverhalten: • Linkskrümmung/Rechtskrümmung • Wendestelle • Wendepunkte	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen graphisch und rechnerisch das Krümmungsverhalten sowie die Wendestellen bzw. Koordinaten der Wendepunkte eines Funktionsgraphen, • nutzen Krümmungsverhalten, Wendestellen und -punkte zur Untersuchung von Funktionsgraphen.
Trigonometrische Funktionen • Sinusfunktion mit $f(x) = \sin(x)$ und Kosinusfunktion mit $f(x) = cos(x)$ - Definitionsmenge - Wertemenge - Periode - Nullstellen - Monotonieintervalle - Symmetrieeigenschaften (Punkt- bzw. Achsensymmetrie)	Die Schülerinnen und Schüler • geben die Eigenschaften der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion an und zeichnen ihre Graphen, • bestimmen zu einer Stelle x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ die entsprechenden Sinus- bzw. Kosinuswerte anhand der Graphen der trigonometrischen Funktionen • nennen die besonderen Werte der Sinusfunktion bzw. der Kosinusfunktion für $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$, • geben die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen an,

- Graph - Ableitungen: $(sin(x))' = cos(x)$ $(cos(x))' = -sin(x)$ • Allgemeine trigonometrische Funktionen - $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ $f(x) = a \cdot cos(b \cdot x + c) + d$mit $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $c, d \in \mathbb{R}$	• beschreiben den Einfluss der Parameter a, b, c und d der allgemeinen Funktionsgleichung auf die Graphen von Sinus- bzw. Kosinusfunktion, • bestimmen zu vorgegebenen Funktionsgraphen die Werte der Parameter a, b, c und d, • beschreiben die Analogie zur Bedeutung der Parameter bei den quadratischen Funktionen.
Einfache gebrochen rationale Funktionen • Funktionen mit Funktionstermen der Form $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ bzw. $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$ - Definitionsmenge - Symmetrie (gerade bzw. ungerade Funktionen) - Grenzwerte - Asymptote - Nullstellen - Monotonieintervalle - Symmetrieeigenschafen - Graph	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen die Definitionsmenge und die Definitionslücken von gebrochen rationalen Funktionen, • beschreiben den Zusammenhang zwischen den Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ bzw. $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$. • untersuchen Eigenschaften von Funktionen mit Funktionstermen der Form $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ bzw. $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ und skizzieren ihre Graphen.
Exponentialfunktionen • **natürliche Exponentialfunktion mit Basis e (e-Funktion)** - Definition der Eulerschen Zahl e - Definition der e-Funktion mit $f(x) = e^x$ - Eigenschaften der e-Funktion (Ableitung, Monotonie, Krümmung, Grenzwerte, Graph) • **zusammengesetzte Funktionen** - Produkte der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen - Verhalten von Funktionen mit $f(x) = x^n \cdot e^{cx}$ für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$ • **exponentielles Wachstum** - charakteristische Merkmale - konstanter Quotient $\frac{f(x+1)}{f(x)}$	Die Schülerinnen und Schüler • geben Eigenschaften der e-Funktion an und skizzieren ihren Graphen, • untersuchen aus der e-Funktion und ganzrationalen Funktionen zusammengesetzte Funktionen, • bestimmen das Verhalten von Funktionen der Form $f(x) = x^n \cdot e^{cx}$ für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$ und $n \in \mathbb{N}$, • geben Beispiele für exponentielles Wachstum an und beschreiben Unterschiede zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

- Grenzwertverhalten	
Logarithmusfunktion • **natürliche Logarithmus-Funktion (ln-Funktion)** - Definition - Eigenschaften (Differenzierbarkeit und Ableitung, Stammfunktionen, Monotonie, Krümmung, Wertemenge, Verhalten für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$, Graph) - Funktionaleigenschaften -	Die Schülerinnen und Schüler • formulieren die Definition der ln-Funktion sowie ihre Eigenschaften und die grundlegenden Funktionaleigenschaften $ln(x_1 \cdot x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)$ $ln(x^r) = r \cdot ln(x)$, •

Fakultative Inhalte

Weitere Ableitungsregeln • *Quotientenregel*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *bestimmen Ableitungen mithilfe der Quotientenregel.*
Gebrochen rationale Funktionen • *Gebrochen rationale Funktionen* - *Definitionsmenge* - *Symmetrie (gerade bzw. ungerade Funktionen)* - *Grenzwerte* - *Asymptote* - *Nullstellen* - *Monotonieintervalle* - *Symmetrieeigenschafen* - *Graph*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *untersuchen Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen.*
Exponentialfunktionen • ***zusammengesetzte Funktionen*** - *Quotienten der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *untersuchen aus der e-Funktion und ganzrationalen Funktionen zusammengesetzte Funktionen.*
Logarithmusfunktion • ***zusammengesetzte Funktionen*** - *Produkte der ln-Funktion mit ganzrationalen Funktionen* - *Quotienten der ln-Funktion mit ganzrationalen Funktionen* - Verhalten von Funktionen mit $f(x) = x^n \cdot ln(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$	*Die Schülerinnen und Schüler* • *untersuchen aus der ln- Funktion und ganzrationalen Funktionen zusammengesetzte Funktionen,* • *bestimmen das Verhalten von Funktionen des Typs $f(x) = x^n \cdot ln(x)$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$,* • *bestimmen Stammfunktionen zu Funktionen der Form $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.*

• ***Stammfunktionen zu Funktionen der Form $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$*** *(logarithmisches Integrieren)*	

Hinweise

- Allgemein sollen bei den gebrochen rationalen Funktionen keine zu komplizierten Nennerfunktionen verwendet werden (maximal bis zum Grad 2) und auf Scharparameter verzichtet werden. Die zweite Ableitung wird formal durch Anwendung der Ableitungsregeln auf die erste Ableitung erhalten. Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung wird erst bei der Untersuchung des Krümmungsverhaltens von Graphen thematisiert.
- Wendepunkte werden lediglich durch die Vorzeichenuntersuchung der zweiten Ableitung bestimmt.
- Begründungen wie „Exponentialfunktionen wachsen stärker als Potenzfunktionen“ reichen zur Bestimmung des Grenzwertverhaltens an den Rändern der Definitionsmenge aus. Eine formale Begründung der Grenzwertsätze wird nicht erwartet.
- Eine qualitative Beschreibung des Verhaltens der ln-Funktion gegenüber den Potenzfunktionen reicht aus.
- Bei den zusammengesetzten Funktionen beschränke man sich auf die Untersuchung einfacher Beispiele.
- Die ln-Funktion kann als Umkehrfunktion der e-Funktion eingeführt werden. Alternativ ist eine Einführung als $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ möglich – sofern die Integralrechnung schon eingeführt wurde.

2.2.3 Analysis – Integralrechnung

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Integral und Stammfunktion • Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen • Einführung des Integrals • Eigenschaften des Integrals (Linearität, Intervalladditivität) • Integrationsregeln • bestimmtes Integral • Stammfunktionen • Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung • Anwendungen des Integrals bei Flächenberechnungen: - Fläche zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse - Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern Methoden der näherungsweisen Bestimmung von Flächeninhalten (z. B. mithilfe ein- und umbeschriebener Rechtecke) • geben die Bedeutung sowie die Eigenschaften des Integrals an, • erläutern den Begriff der Stammfunktion und geben zu einer Funktion eine Stammfunktion an, • begründen, dass es zu einer Funktion mehrere Stammfunktionen gibt, die sich durch additive Konstanten unterscheiden, • berechnen bestimmte Integrale mit Hilfe der Formel $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, • ermitteln Inhalte von Flächen mithilfe der Integralrechnung.

Hinweise

- Es ist kein ausführlicher Beweis des Hauptsatzes nötig.

2.3 Klassenstufe 12

2.3.1 Vektorielle Geometrie – Grundlagen [4]

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Vektoren • Vektorrechnung im Raum • kartesisches Koordinatensystem im Raum • Kollinearität • Komplanarität	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Punkte und Repräsentanten von Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem dar, • übertragen die Vektorrechnung aus der Ebene in den Raum, • veranschaulichen die Kollinearität zweier Vektoren bzw. die Komplanarität dreier Vektoren geometrisch, • überprüfen die Kollinearität zweier Vektoren bzw. die Komplanarität dreier Vektoren rechnerisch.

Das Skalarprodukt in der Ebene und im Raum
• Definition
• Eigenschaften
• Winkel zwischen zwei Vektoren
• Rechenregeln
• Betrag eines Vektors
• Orthogonalität zweier Vektoren
• Anwendungen des Skalarprodukts:
  - Berechnung von Winkelmaßen
  - Berechnung von Streckenlängen
	Die Schülerinnen und Schüler
	• berechnen Skalarprodukte,
	• wenden die Rechenregeln für das Skalarprodukt an,
	• berechnen Beträge von Vektoren,
	• beweisen die Orthogonalität zweier Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts,
	• berechnen mit Hilfe des Skalarproduktes Maße von Winkeln und Längen von Strecken.

Das Vektorprodukt • Definition	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen mit Hilfe des Vektorprodukts einen Vektor, der orthogonal zu zwei gegebenen Vektoren ist.

Fakultative Inhalte

Das Vektorprodukt
• *Anwendung des Vektorprodukts*
  - *Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms und eines Dreiecks*
  - *Bestimmung eines Normalenvektors einer Ebene*
	Die Schülerinnen und Schüler
	• *berechnen mit Hilfe des Vektorproduktes den Flächeninhalt eines Parallelogramms und eines Dreiecks,*
	• *bestimmen einen Normalenvektor einer Ebene.*

Hinweis
- Das Vektorprodukt ist nur als Rechenhilfe einzusetzen.

[4] Im Folgenden beziehen sich alle Vorgaben auf geometrische Objekte in kartesischen Koordinatensystemen.

2.3.2 Vektorielle Geometrie – Objekte im Raum [5]

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Geraden im Raum • Darstellung von Geraden im Raum - Zweipunktegleichung - vektorielle Parametergleichung	Die Schülerinnen und Schüler • stellen eine Parametergleichung einer Gerade auf und begründen, dass diese nicht eindeutig ist, • stellen Geraden in einem Koordinatensystem geeignet dar, • überprüfen rechnerisch, ob ein vorgegebener Punkt auf einer Geraden liegt.
Ebenen im Raum • Darstellung einer Ebene im Raum - Dreipunktegleichung - vektorielle Parametergleichung mit zwei nicht kollinearen Spannvektoren - Normalengleichung - Koordinatengleichung	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Ebenengleichungen auf (auch in Sachkontexten), • überprüfen rechnerisch, ob ein vorgegebener Punkt in einer Ebene liegt, • wandeln die verschiedenen Darstellungen von Ebenengleichungen ineinander um.
Lagebeziehungen und Schnittwinkel • Lageziehung: - Gerade – Gerade - Gerade – Ebene - Ebene – Ebene • Schnittwinkel zwischen - zwei Geraden - zwei Ebenen	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben die möglichen Lagebeziehungen zwischen den vorgegebenen Objekten, • untersuchen rechnerisch die Lagebeziehungen zwischen den vorgegebenen Objekten, • bestimmen die Maße von Schnittwinkeln zwischen den vorgegebenen Objekten.
Abstände • Abstand eines Punktes von - einer Ebene - einer Gerade	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen Abstände zwischen den vorgegebenen Objekten.

Fakultative Inhalte

Der Kreis in der Ebene • *Koordinatengleichung eines Kreises* • *Vektorgleichung eines Kreises*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *beschreiben Kreise in der Ebene mithilfe von Gleichungen,* • *wandeln eine Darstellungsform in die andere um.*

[5] Im Folgenden beziehen sich alle Vorgaben auf geometrische Objekte in kartesischen Koordinatensystemen.

Abstände • *Abstand paralleler Geraden* • *Abstand einer Geraden von einer zu ihr parallelen Ebene* • *Abstand zweier paralleler Ebenen*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *berechnen Abstände.*
Komplexe Anwendungen • *Spiegelung eines Punkts an* - *einem Punkt* - *einer Ebene* • *Volumen von Quader und Pyramide*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *berechnen die Koordinaten von Spiegelpunkten,* • *berechnen Volumen von Quader und Pyramiden,* • *weisen geometrische Eigenschaften nach (z. B. Quadrat, gleichschenkliges Dreieck, …)*

Hinweis

- Die Untersuchung von Lagebeziehungen im Raum bietet die Möglichkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen und zu lösen.

2.3.3 Statistik und Wahrscheinlichkeit

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Mehrstufige Zufallsexperimente • Baumdiagramm • Pfadregeln - Multiplikationsregel - Additionsregel • Vereinfachtes Baumdiagramm	Die Schülerinnen und Schüler • geben bei n-stufigen Zufallsexperimenten die Ergebnisse als n-Tupel an, • stellen mehrstufige Zufallsexperimente in Baumdiagrammen dar, • berechnen mithilfe der Pfadregeln Wahrscheinlichkeiten bei n-stufigen Zufallsexperimenten.
Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit • bedingte Wahrscheinlichkeit • Unabhängigkeit zweier Ereignisse • Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler • entnehmen Bedingungen aus Aufgabentexten und stellen bedingte Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Notation $\mathrm{P_A(B)}$ dar, • stellen eine Situation im Sachkontext mit Hilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel dar, • berechnen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit in der Form $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$.
Kombinatorik • Urnenmodelle mit und ohne Beachtung der Reihenfolge - Ziehen mit Zurücklegen - Ziehen ohne Zurücklegen	Die Schülerinnen und Schüler • wenden die Rechenregeln der Kombinatorik an und lösen damit Aufgaben in Sachkontexten.

- Permutationen von k Objekten - gleichzeitiges Ziehen von k aus n Objekten • Rechenregeln: n-Fakultät, k-Permutationen, Kombinationen (Binomialkoeffizient)	
Binomialverteilung • Bernoulli-Experimente, Bernoulli-Ketten, Binomialverteilung • Verteilungsfunktion • Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung	Die Schülerinnen und Schüler • entscheiden begründet, ob Zufallsgrößen mithilfe einer Binomialverteilung modelliert werden können, • erläutern mithilfe eines Baumdiagramms, dass die Binomialkoeffizienten die Anzahl der Pfade für k Treffer bei n Versuchen angeben, • berechnen Wahrscheinlichkeiten und kumulierte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Binomialverteilung unter Verwendung eines digitalen Mathematikwerkzeugs (Taschenrechner, Software), • berechnen und interpretieren den Erwartungswert und die Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße.

Fakultative Inhalte

Approximation von Binomialverteilungen durch die Normalverteilung • *Standardisieren einer binomialverteilten Zufallsgröße* • *näherungsweise Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Standardnormalverteilung*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *geben an, dass sich eine Binomialverteilung für $\sigma > 3$ durch eine Normalverteilung approximieren lässt,* • *standardisieren eine binomialverteilte Zufallsvariable X durch $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$,* • *berechnen näherungsweise Wahrscheinlichkeiten für die standardisierte Zufallsvariable Z mithilfe von digitalen Mathematikwerkzeugen oder von Tabellenwerten der Standardnormalverteilung.*
Testen von Hypothesen • *Nullhypothese* • *Alternativhypothese* • *Entscheidungsregeln* • *Fehler 1. und 2. Art* • *Irrtumswahrscheinlichkeit*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *führen Hypothesentests mithilfe von Binomialverteilungen durch,* • *formulieren anhand vorgegebener Testanordnungen die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1 und ermitteln kritische Bereiche, Entscheidungsregeln sowie den Fehler 1. und 2. Art.*

Hinweise

- Ein axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht vorgesehen.

- In der Kombinatorik ist eine Einschränkung auf Situationen mit einfachen kombinatorischen Berechnungen zu beachten.
- Die mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit verbundene Begriffsbildung wird von den Schülerinnen und Schülern nicht erwartet, aber sie sollen in der Lage sein, die Formel einzusetzen.

3 Operatoren

Operator	Definition
angeben, nennen	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen
begründen	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnung, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitung oder in inhaltlicher Argumentation verifizieren oder falsifizieren
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
beschreiben	Einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter korrekter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beweisen, zeigen	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
entnehmen	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterverarbeitung aufbereiten
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
erläutern	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden
graphisch darstellen, zeichnen	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben, graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte bzw. maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche graphisch beschreibt.
überprüfen	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten
verwenden, nutzen, umgehen mit	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen
zuordnen	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen

2025

Programme / Lehrplan

LFA / DFG

Mathématiques / Mathematik

Spécialité / Vertiefungsfach

Classes de 1ère et Terminale / Klassenstufen 11 und 12

Table de matière

1 Idées directrices

1.1. Finalités éducatives

L’enseignement des mathématiques favorise de manière significative le développement personnel des jeunes en leur transmettant des compétences méthodologiques, des connaissances disciplinaires et des attitudes adaptées et renforce ainsi l'autodétermination fondée sur une pensée rationnelle. En cela, l’enseignement des mathématiques apporte une contribution majeure à une formation générale approfondie.

Les connaissances mathématiques acquises à l'école constituent donc une part importante de la capacité générale à étudier et la base disciplinaire pour les jeunes qui choisissent une poursuite d'études ou un domaine de carrière caractérisé par la pensée mathématique. Outre les mathématiques, les sciences et les disciplines technologiques, ces connaissances constituent désormais un enjeu croissant pour les sciences économiques et sociales.

Être capable d’opérer des transferts en se fondant sur des lois mathématiques et leur mobilisation constitue également une valeur intellectuelle en soi et représente une contribution importante des mathématiques à notre culture. Les compétences développées dans les cours de mathématiques permettent une évaluation critique des évolutions sociétales et encouragent une action responsable.

Un aperçu des différentes traditions pédagogiques spécifiques à chaque pays contribue au développement des compétences interculturelles franco-allemandes.

1.2. Objectifs

Un cours de mathématiques doit notamment

- initier les élèves aux mathématiques en tant que science appliquée, pertinente au quotidien ainsi que tournée vers la preuve, déduction et l'expérimentation ;
- promouvoir la créativité et l'imagination ;
- permettre aux élèves d‘opérer des transferts en se fondant sur des lois mathématiques et leur mobilisation ;
- sensibiliser les élèves au développement culturel, historique et philosophique des mathématiques ;
- servir de terrain d'exercice aux techniques de travail et de terrain de développement des stratégies cognitives ;
- mettre en évidence les liens entre les différents champs des mathématiques et avec d'autres sciences ;
- contribuer à la capacité générale d'étudier.

Ainsi, pour les cours de mathématiques générales, se posent entre autres les enjeux suivants.

A- <u>Compétences cognitives et procédurales</u>[1]

D’une manière générale, les élèves doivent être capables de

- modéliser des situations issues de la réalité et valider ou rejeter des modèles existants (modélisation) ;
- Rechercher et relier des résultats partiels, se fonder sur des preuves et fournir des justifications (argumenter et démontrer) ;
- rechercher, sélectionner et utiliser des outils appropriés pour résoudre des problèmes – y compris à l'aide de logiciels adaptés (résoudre des problèmes) ;
- discuter des mathématiques, de résultats et de moyens de trouver des solutions tant à l'oral qu'à l'écrit (communiquer) ;

[1] Ce programme prend en compte les compétences mathématiques générales formulées dans une logique procédurale selon les standards d’éducation (KMK) pour l'accès à des études de mathématiques dans l'enseignement supérieur, sans caractérisation, ni attribution spécifique. Ces compétences rejoignent les six compétences des programmes français : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer.

- extraire des informations de représentations et, inversement, présenter les résultats de manière appropriée ;
- traiter les éléments symboliques, formels et techniques des mathématiques (calculer, appliquer et mettre en œuvre des techniques).

B- Compétences numériques et techniques

Grâce à l'utilisation d'outils mathématiques numériques tels que les calculatrices graphiques, les logiciels de géométrie dynamique, les tableurs ou l'intelligence artificielle les processus d'enseignement et d'apprentissage peuvent être soutenus, enrichis et restructurés. Cette compétence des médias doit toujours être prise en compte lors de la conception des projets de cours, même si elle n'est pas toujours spécifiée dans le programme.

C- Compétences de gestion de soi, d'orientation et de travail en équipe

Les cours favorisent l'apprentissage par la découverte. Le développement de stratégies heuristiques par l'expérimentation et les démarches d'essais-erreurs permet aux élèves de découvrir et d'analyser des articulations et des structures. Il permet aux élèves d'isoler les informations essentielles pour une tâche à venir parmi une grande quantité d'informations.
L'enseignement guide les élèves vers un apprentissage à la fois autonome et collaboratif. Il contribue au développement de la confiance en soi et de l'autodiscipline, de la volonté de réussir et de la capacité à se concentrer.

D- Compétences citoyennes et démocratiques

Les cours renforcent et développent les compétences de communication. Les concepts mathématiques sont présentés oralement et par écrit ou illustrés graphiquement. La traduction entre différentes formes de représentation, la formalisation, le travail algorithmique et calculatoire sont des formes spécifiques d'expression mathématique. La maîtrise du langage technique ouvre l'accès à de nombreuses disciplines, notamment scientifiques, techniques et économiques.
Les cours forme à la précision conceptuelle ; il enseigne la capacité à formuler des affirmations avec précision et à tirer des conclusions logiques. Il favorise la volonté et la compétence d'argumentation et l'esprit critique. Il utilise différents niveaux d'argumentation, de la clarification basée sur des exemples à la preuve formelle.
L'enseignement offre un aperçu exemplaire de la genèse historique des mathématiques et de leur importance pour le développement de notre société.

E- Compétences franco-allemandes, européennes et internationales

L'enseignement entièrement intégré des classes de 2nde, 1ère et terminale au lycée franco-allemand signifie toujours que, pour certains élèves, la langue partenaire est utilisée comme langue d'enseignement dans les matières non linguistiques. L'utilisation des langues étrangères comme langues de travail intensifie l'apprentissage disciplinaire et linguistique et sert à préparer à l'internationalisation croissante de l'éducation, des études et de la vie professionnelle. Dans ce sens, la compréhension de la culture du partenaire est favorisée par la sensibilisation aux processus linguistiques d'une part et aux différentes approches des questions disciplinaires selon la tradition didactique d'autre part.

1.3. Enjeux méthodologiques

Une réussite scolaire durable et pérenne nécessite une approche didactique fine et différenciée. Une attention particulière sera accordée aux points suivants :

- L'enseignement contribue au développement d'une logique mathématique de base permettant une appropriation tant du contenu que des stratégies fondamentales.
- L'enseignement accorde une attention particulière à l'articulation des contenus de cours et au développement de transferts avec d'autres disciplines, permettant ainsi des phases de révision systématique.

- En classe, l'utilisation d'outils et de médias numériques peut faciliter l'accès au contenu mathématique.
- L'enseignement mobilise davantage des situations contextualisées, en proposant également des questionnements ouverts laissant place à plusieurs approches ou résultats.

Dans de nombreux domaines de la vie quotidienne et dans presque tous les domaines de la vie professionnelle où des activités hautement qualifiées sont exercées, il est important de comprendre et de traiter ultérieurement des relations quantitatives et des structures abstraites. Dans ce contexte, des approches heuristiques, des stratégies de résolution de problèmes et des procédures qui vont bien au-delà des techniques élémentaires de calcul sont de plus en plus utilisées. L'utilisation d'outils mathématiques numériques tels que les calculatrices graphiques (CG), les logiciels de géométrie dynamique, les tableurs ou l'intelligence artificielle nécessite souvent de comprendre les méthodes mathématiques sous-jacentes, car c'est la seule façon d'évaluer les possibilités et les limites de ces outils et de les utiliser efficacement. Cela implique une analyse critique notamment des résultats obtenus grâce à l'intelligence artificielle.

Il semble judicieux de relier différents contenus et compétences et de les reprendre à plusieurs reprises dans d'autres contextes afin de rendre possible un apprentissage en profondeur en forme de spirale.

En outre, il faut accorder, notamment en seconde, suffisamment de temps à l'unification du corps étudiant franco-allemand. Ici, différentes approches, styles d'expression orale et écrite sont abordés et les principes de base sont alignés et consolidés. La fusion peut avoir lieu dans un bloc plus grand au début de seconde.

1.4. Évaluation

D'une part, l'évaluation est réalisée dans le cadre d'une mesure des performances liée au processus d'apprentissage, en tenant compte des performances en classe.

D'autre part, les travaux écrits servent à évaluer et à fournir un retour sur les compétences acquises en classe par rapport aux sujets et aux matières d'apprentissage abordés en classe. La description des domaines d'exigence sert de guide pour la construction des tâches. Avec leur aide et conformément au programme, des tâches d'évaluation des performances devraient être formulées. L'objectif de l'évaluation doit être de mesurer les performances des candidats de la manière la plus différenciée possible.

La prise en compte des **domaines d'exigences** contribue de manière significative à parvenir à un rapport équilibré entre les exigences, à accroître la comparabilité des tâches et à rendre l'évaluation des performances transparente. Le programme actuel n'identifie pas explicitement les domaines d'exigence dans les différentes matières.

Le **domaine d'exigence I (Reproduction)** comprend généralement des tâches avec un degré de complexité inférieur telles que

• la reproduction de données, de faits, de règles, de formules, de phrases, etc. à partir d'une zone définie dans le contexte appris,

• la description et l'utilisation de techniques et de procédures de travail apprises et pratiquées dans un domaine limité et dans un contexte répétitif.

Le **domaine d'exigence II (transferts)** comprend généralement des tâches d'un degré de complexité moyen tels que

• la sélection, l'agencement et la présentation de manière autonome de contenus connus donnés dans un contexte maîtrisé par la pratique et similaire des entraînements réalisés en classe,

• l'application en autonomie de ce qui a été appris à des situations nouvelles comparables, qui impliquent soit des questions modifiées, soit des contextes modifiés, soit des procédures adaptées.

Le **domaine d'exigence III (généralisation et réflexion)** comprend généralement des tâches avec un degré de complexité plus élevé telles que

- le traitement systématique et créatif de problèmes complexes dans le but d'arriver de manière indépendante à des solutions, des interprétations, des évaluations et des conclusions,
- la sélection et l’adaptation conscientes et indépendantes de techniques et de procédures de travail apprises et appropriées pour faire face à de nouveaux problèmes.

2 Contenus et compétences disciplinaires

Le programme est structuré en fonction des différents domaines d'apprentissage. Le contenu obligatoire et les compétences obligatoires attendues sont énumérés dans deux colonnes. L'affectation des compétences attendues au contenu n'exclut pas la possibilité que des compétences supplémentaires puissent être acquises par les élèves.

L'ordre des différents sujets au sein du niveau scolaire spécifié n'est contraignant que dans la mesure où il apparaît logiquement nécessaire. Cependant, il n'anticipe pas les décisions didactiques et méthodologiques de l'enseignant ni les conseils d'enseignement de mathématiques.

2.1 Classe de première

2.1.1 Suites

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**

Généralités sur les suites
• définition d'une suite
• notation indicielle
• mode de définition d'une suite :
  - explicite
  - par récurrence
  - par description verbale
• représentation graphique
• variations
  - suite constante
  - suite croissante
  - suite décroissante
	Les élèves
	• modélisent des situations concrètes à l'aide de suites et les étudient,
	• représentent et exploitent la représentation graphique d'une suite,
	• étudient les variations d'une suite.

Principe de récurrence	Les élèves • explicitent la méthode de démonstration par récurrence, • l'utilisent pour démontrer des résultats (par exemple, l'expression de la somme des n premiers entiers ou des n premiers carrés, ou que 4 est un diviseur de $5^n - 1$).
Suites arithmétiques • définition • représentation graphique • forme explicite, relation de récurrence • somme de termes consécutifs • limite	Les élèves • indiquent la définition d'une suite arithmétique, • construisent la représentation graphique d'une suite arithmétique, • passent de la relation de récurrence à la forme explicite et explicitement, • calculent la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Suites géométriques • Définition • Représentation graphique • Forme explicite, relation de récurrence • Somme de termes consécutifs • Limite, critère de convergence	Les élèves • connaissent la définition d'une suite géométrique, • représentent la représentation graphique d'une suite géométrique, • passent de la relation de récurrence à la forme explicite et explicitement, • calculent la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, • énoncent le critère de convergence d'une suite géométrique ($-1 < q < 1$) et l'appliquent.

Indication

- Pour énoncer le critère de convergence, on se limite à une notion intuitive de limite.

2.1.2 Analyse – Suite de fonctions

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Composition des fonctions • Composition des fonctions	Les élèves • indiquent la première fonction d'une fonction composée et la seconde, • à partir de deux fonctions données, composent les fonctions composées de ces deux fonctions ⍰
Fonction réciproque • Fonction réciproque Notation $f^{-1}(x)$ • Symétrie des courbes représentatives d'une fonction et de sa réciproque	Les élèves • justifient la bijectivité d'une fonction et déterminent, le cas échéant, la fonction réciproque d'une fonction donnée, • utiliser la symétrie de la courbe représentative d'une fonction et de celle de sa réciproque, pour la tracer ou pour établir des propriétés.
Limites • Théorème de comparaisons, théorème des gendarmes • Asymptotes - horizontale - verticale - oblique	Les élèves • déterminent les limites des sommes, produits, quotients et composée de fonctions de référence, • déterminent les limites à l'aide de théorèmes de comparaison, • déterminent les équations des asymptotes des courbes de fonctions rationnelles, • démontrent qu'une droite donnée est l'asymptote de la courbe d'une fonction donnée.

Compléments sur la dérivation • Dérivee du produit d'une fonction dérivable par un réel • Dérivée d'un quotient • Dérivée d'une composée • Dérivées d'ordre supérieur	Les élèves • justifient la dérivabilité d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions • déterminent les dérivées d'ordre supérieur, • ~~et~~ calculent les fonctions dérivées.
Convexité • Convexité, concavité • Points d'inflexion	Les élèves • déterminent par le calcul et graphiquement les points d'inflexion et la convexité d'une fonction, • utilisent la convéxité et les points d'inflexions pour l'étude de courbes de fonctions.

Indications

- La notion de réciproque peut être utilisée pour introduire les fonctions logarithmiques (voir 2.1.4).
- L'objectif est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en classe.
- L'étude des limites peut être faite en lien avec le thème « fonctions rationnelles » (voir partie 2.1.4)
- La dérivée seconde est formellement obtenue en appliquant les règles de dérivation à la dérivée première. La signification géométrique de la dérivée seconde n'est abordée que lors de l'étude de la convexité.
- Les points d'inflexion sont déterminés uniquement en examinant le signe de la dérivée seconde.
- Les fonctions rationnelles à dériver ont un numérateur et un dénominateur de degré inférieur ou égal à 3.

2.1.3 Trigonométrie

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Notions de base de la trigonométrie • cercle trigonométrique - mesure d'angle orienté - sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique • radians - unité radian (1 rad) - longueur de l'arc - valeur principale • Relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	Les élèves • tracent le point P correspondant à un angle α sur le cercle unité et spécifient $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ comme ordonnée et abscisse correspondantes du point P, • déterminent à l'aide du cercle trigonométrique les solutions des équations du type $\cos(x) = \cos(\alpha)$ et $\sin(x) = \sin(\alpha)$ et représentent les solutions sur le cercle unité, • déterminent la mesure en radians correspondante et la valeur principale dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ pour une mesure d'angle en degrés,

• équations trigonométriques	• donnent la mesure en radians des angles particuliers sous forme de fractions ou de multiples de π, • déterminent la mesure de degré correspondante pour les mesures d'angle x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ en radians.

2.1.4 Analyse – autres fonctions usuelles

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**

Fonctions trigonométriques
 	
• Fonctions sinus et cosinus avec $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = cos(x)$:
- ensemble de définition
- ensemble de valeurs
- période
- racines
- intervalles de variation
- propriétés de symétrie (centrale ou axiale) des courbes représentatives
- représentation graphique
- fonctions dérivées : $(sin(x))' = cos(x)$ $(cos(x))' = -sin(x)$
- fonctions trigonométriques générales
  - $f(x) = a\sin(bx + c) + d$
  - $f(x) = a\cos(bx + c) + d$
 	
avec $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $c, d \in \mathbb{R}$
	Les élèves
	• énoncent les propriétés des fonctions sinus et cosinus et tracer leurs graphiques,
	• déterminent les valeurs de sinus ou de cosinus correspondantes pour un point x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ en utilisant les courbes représentatives des fonctions trigonométriques,
	• connaissent les valeurs de la fonction sinus et de la fonction cosinus pour $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi,$
	• décrivent l'influence des paramètres a, b, c et d de l'équation de fonction générale sur les graphiques des fonctions sinus et cosinus,
	• déterminent les valeurs des paramètres a, b, c und d pour des représentations graphiques données,
	• savent discuter de l'influence des paramètres par analogie avec les fonctions du second degré,
	• calculent les dérivées des fonctions trigonométriques.

Fonctions rationnelles • ensemble de définition • continuité et dérivabilité • symétrie (fonctions paires ou impaires) • limites • asymptotes • racines • intervalles de variations • extrema • points d'inflexion • courbes représentatives	Les élèves • déterminent les valeurs où le dénominateur s'annule et les limites respectives • simplifient les polynômes éventuels du (dé)nominateur d'une fonction rationnelle par division polynôme ou en factorisant, • étudient par le calcul les propriétés de fonctions rationnelles et travent leurs courbes representatives, • décrivent le lien entres les courbes représentatives des fonctions $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ ou $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Fonctions exponentielles **Fonction exponentielle de base b** - ensemble de définition - ensemble des valeurs prises par $f(x)$	Les élèves • donnent les propriétés algébriques de la fonction exponentielle et tracent la courbe représentative,

- sens de variation - limites - représentation graphique - dérivabilité de fonctions avec $f(x) = b^x$ • **fonction exponentielle naturelle de base e** - définition du nombre d'Euler e - définition de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ - propriétés de la fonction exponentielle de base e (dérivée, sens de variation, convexité, limites, asymptotes, courbe représentative) • **opérations et composition** - produits, quotients et composées simples de la fonction exponentielle avec des polynômes - comportement de fonctions de la forme $f(x) = x^n e^{cx}$ pour $x \to +\infty$ et pour $x \to -\infty$, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$ • **croissance exponentielle** - propriétés charactéristiques - quotient constant $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ - comportement aux limites - modélisations de situations de croissance • **Equations différentielles de la forme $y' = ay$ et $y' = ay + b$**	• indiquent e comme la base de la fonction exponentielle vérifiant $f'(0)=1$, • étudient des fonctions exponentielles ainsi que des composées de polynômes et de la fonction exponentielle de base e, • déterminent les limites à l'infini de fonctions du type $f(x) = x^n e^{cx}$, • donnent des exemples de croissance exponentielle, • indiquent les différences entre les croissances exponentielle et linéaire, • modélisent des processus de croissance et de décroissance exponentielle et jugent de la pertinence du modèle choisi, • résolvent des équations différentielles de la forme $y' = ay$ et $y' = ay + b$.
Fonction logarithme • **notion de logarithme** - définition - propriétés - propriétés algébriques • **logarithme népérien** - définition - propriétés (dérivabilité et dérivée, primitives, variations, convexité, ensemble image, limites pour x→+∞ et x→0+, représentation graphique - proprietés fonctionnelles • **opérations et composition**	Les élèves • explicitent la notion de logarithme et indiquent que $\log_b(x)$ est la solution de l'équation $b^y = x$, • énoncent et utilisent les propriétés de base et les propriétés algébriques ainsi que leurs conséquences, • font le lien entre le logarithme népérien et le logarithme de base b suivant et l'utilisent pour calculer: $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$, • énoncent la définition de la fonction logarithme népérien ainsi que ses caractéristiques usuelles: $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ $\ln(x^r) = r\ln(x)$, • utilisent à bon escient la relation $b^x = e^{x\ln(b)}$,

- produits, quotients et composées de la fonction ln avec des fonctions polynômes - comportement de fonctions de la forme $f(x) = x^n \ln(x)$ pour $x \to +\infty$ et pour $x \to 0^+$; $n \in \mathbb{N}$ • **primitives de $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$** (intégration logarithmique)	• indiquent que la fonction ln est l'unique primitive de la fonction inverse s'annulant en 1 : $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, • étudient des fonctions composées de la fonction logarithme népérien et de fonctions polynômes, • déterminent le comportement des fonctions du type $f(x) = x^n \ln(x)$ pour $x \to +\infty$ ou $x \to 0^+$, • déterminent les primitives des fonctions de la forme $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

Indications

- En général, les fonctions rationnelles ne doivent pas comporter de dénominateurs trop complexes (au maximum de degré 2).
- Les points d'inflexion sont déterminés uniquement en examinant le signe de la dérivée seconde.
- L'étude des familles de fonctions pourra compléter le thème, mais ne pourra pas être le thème central de l'étude.
- La détermination d'asymptotes obliques pourra être effectuée à l'aide de la division de polynômes.
- Des justifications telles que « les fonctions exponentielles croissent plus vite que les fonctions puissance » suffisent à déterminer le comportement limite aux bords du domaine. Une justification formelle des théorèmes limites n'est pas attendue.
- La fonction ln peut être introduite comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Alternativement, une introduction comme $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ est possible – à condition que le calcul intégral ait déjà été introduit.
- On définit le logarithme de base b de manière générale mais on se restreindra aux cas $b > 1$ pour l'étude de ces fonctions.

2.1.5 Analyse – Calcul intégral

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**
Intégrale et primitive • aires limitées pas des courbes • introduction de l'intégrale • propriétés de l'intégrale (linéarité, additivité des intervalles) • règles d'intégration • intégrale définie • primitives • théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	Les élèves • explicitent les méthodes de détermination approximative de l'aire (par exemple, méthode des rectangles), • déterminent approximativement l'aire limitée par des courbes • donnent la signification et les propriétés de l'intégrale, • expliquent le concept de primitive et donnent une primitive pour une fonction donnée,

• applications de l'intégrale dans les calculs d'aire : - aire entre la courbe représentative d'une fonction et l'axe des abscisses - aire entre deux courbes représentatives de fonctions • Intégration par parties	• justifient qu'il existe pour une fonction plusieurs primitives qui diffèrent par des constantes additives, • calculent certaines intégrales à l'aide de la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, • déterminent des aires limitées par des courbes à l'aide du calcul intégral, • résolvent des problèmes appliqués à l'aide du calcul intégral, • calculent des intégrales en utilisant la méthode d'intégration par parties.

2.2 Terminale

2.2.1 Géométrie vectorielle – Principes de base [2]

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**
Vecteurs • calcul vectoriel dans l'espace • repères orthonormés dans l'espace	Les élèves • représentent des points et des représentants de vecteurs dans un repère orthonormé, • transfèrent les calculs vectoriels du plan vers l'espace
Colinéarité et Coplanarité • dépendance, indépendance linéaire de vecteurs dans l'espace	Les élèves • déterminent par le calcul si deux vecteurs sont colinéaires ou si trois vecteurs sont coplanaires • interprétent ces résultats géométriquement et les démontrer algébriquement
Le produit scalaire dans le plan et dans l'espace • définition • propriétés • angle entre deux vecteurs • règles de calcul • norme d'un vecteur • orthogonalité de deux vecteurs • applications du produit scalaire : - calcul des mesures d'angle - calcul des longueurs de segment	Les élèves • calculent des produits scalaires, • appliquent les règles de calcul du produit scalaire, • indique le lien entre le produit scalaire et la norme d'un vecteur, • calculent les normes des vecteurs, • vérifient l'orthogonalité de deux vecteurs en utilisant le produit scalaire, • démontrent des théorèmes de géométrie à l'aide du produit scalaire (p.ex. théorème de Thalès, théorème de Pythagore, théorème de la moyenne geométrique) • calculent des mesures d'angle et des longueurs de segment à l'aide du produit scalaire.
Le produit vectoriel • définition • propriétés • relations $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v}\overrightarrow{\wedge u}$ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ • applications du produit vectoriel - détermination de l'aire d'un parallélogramme et d'un triangle	Les élèves • indiquent la définition et les propriétés du produit vectoriel, • utilisent le produit vectoriel pour déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés • calculent l'aire d'un parallélogramme et d'un triangle à l'aide du produit vectoriel, • déterminent un vecteur normal à un plan

[2] Dans ce qui suit, les repères sont orthonormés.

- détermination d'un vecteur normal à un plan	

Contenu facultatif

Application du produit scalaire • *Formules d'addition en trigonométrie*	*Les élèves* • *appliquent les formules d'addition.*
• ***Application du produit vectoriel*** • *Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs*	*Les élèves* • *vérifient si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du produit vectoriel.*

Indication

- Le calcul vectoriel est traité de manière analytique.

2.2.2 Géométrie vectorielle – Objets de l'espace [3]

Contenu obligatoire	**Compétences à acquérir**
Droites dans l'espace • représentation des droites dans l'espace - à partir de deux points - représentation paramétrique vectorielle	Les élèves • établissent une équation paramétrique d'une droite et justifient pourquoi elle n'est pas unique, • représentent des droites dans un système orthonormé, • vérifient par le calcul si un point donné se trouve sur une droite.
Plans dans l'espace • représentation d'un plan dans l'espace - à partir de trois points - représentation paramétrique vectorielle avec deux vecteurs non colinéaires - équation cartésienne avec un vecteur normal - équation cartésienne	Les élèves • établissent des équations de plan (aussi dans des contextes concrets) • représentent de manière appropriée les plans dans un système orthonormé, • vérifient par le calcul si un point donné se situe dans un plan, • passent d'une représentation de plan à une autre.

[3] Dans ce qui suit, les repères sont orthonormés.

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Positions relatives et angles • position relative : - de deux droites, - d'une droite et d'un plan - de deux plans • angle entre : - deux droites - deux plans - une droite et un plan	Les élèves • décrivent les relations spatiales possibles entre les objets donnés, • étudient par le calcul les relations de position entre les objets donnés, • déterminent les angles entre les objets donnés.
Distances • distance entre un point et : - un plan - une droite • distance - entre deux droites parallèles - d'une droite à un plan qui lui est parallèle - entre deux plans parallèles	Les élèves • calculent les distances entre les objets donnés.
Applications complexes • symétrique d'un point par rapport à - un point - un plan • volumes du pavé et de la pyramide	Les élèves • calculent les coordonnées des points miroirs, • calculent les volumes des pavés et des pyramides, • démontrent des propriétés géométriques (par exemple, carré, triangle isocèle, …)

Fakultative Inhalte

Le cercle • *représentation du cercle* - *Équation cartésienne* - *Équation vectorielle*	*Les élèves* • *passent d'une représentation à une autre.*
La sphère • *représentations de la sphère* - *équation cartésienne* - *équation vectorielle* • *position relative* - *d'une sphère et d'une droite* - *d'une sphère et d'un plan* - *de deux sphères*	*Les élèves* • *passent d'une représentation à une autre,* • *étudient par le calcul les positions relatives,* • *déterminent le cercle d'intersection de deux sphères.*

Indications

- L'étude de positions relatives dans l'espace offre la possibilité d'établir et de résoudre des systèmes d'équations linéaires.
- Les symétriques d'un point par rapport à un plan ou une droite sont une application des calculs de distance.
- Les représentations paramétriques de cercle ne sont pas prévu.

2.2.3 Statistique et probabilités

Contenu obligatoire	Compétences à acquérir
Statistique descriptive • ~~collecte et enregistrement des données, traitement de données, formes de représentations, diagrammes~~ • ~~fréquences absolues et relatives~~ • ~~médiane, quartiles, diagramme en boîte~~ • moyenne arithmétique • caractéristiques de dispersion : - Variance - Écart type	Les élèves • ~~collectent et enregistrent des données statistiquement, les organisent, les présentent clairement, les analysent et les interprètent,~~ • ~~déterminent des fréquences absolues et relatives,~~ • ~~calculent la médiane et les quartiles pour des ensembles de données donnés et les utilisent pour évaluer les données,~~ • calculent la moyenne et l'écart type d'une série statistique pour des ensembles de données donnés et les utilisent pour évaluer les données, • étudient une série statistique ou comparent deux séries statistiques à l'aide d'un outil numérique.
~~**Probabilités**~~ • ~~expérience aléatoire~~ – ~~issues de l'expérience aléatoire ω_1, ω_2, … ω_n~~ – ~~ensemble de résultats Ω~~ – ~~fréquence d'un résultat~~ – ~~loi empirique des grands nombres~~ • ~~événements~~ – ~~événements élémentaires~~ – ~~probabilité d'un événement~~ – ~~les événements $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$~~ – ~~probabilité de $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$~~ • ~~distribution de probabilité~~ • ~~tableau à double entrée~~ • ~~expériences aléatoires dans lesquelles tous les événements élémentaires sont également probables (expériences de Laplace)~~	~~Les élèves~~ • ~~interprètent le concept de probabilité en relation avec des issues également probables comme fréquence relative stabilisée et résolvent des tâches et des problèmes connexes,~~ • ~~énoncent des ensembles de résultats d'expériences aléatoires simples et calculent la probabilité d'un événement (y compris l'événement opposé, l'événement et, l'événement ou),~~ • ~~créent des tableaux à double entrée et les utilisent pour déterminer les probabilités,~~ • ~~décident et justifient si les expériences aléatoires sont des expériences de Laplace et calculent les probabilités de Laplace.~~

Expériences aléatoires à plusieurs étapes • arbre de probabilités • règles de calcul - règle du produit - règle de la somme • arbre de probabilité tronqué	Les élèves • pour les expériences aléatoires à n étapes, donnent les résultats sous forme de n-uplets, • représentent des expériences aléatoires à plusieurs étapes dans à l'aide d'arbres de probabilités, • calculent les probabilités dans des expériences aléatoires à n étapes.
Probabilité conditionnelle et indépendance • probabilité conditionnelle • indépendance de deux événements • théorème des probabilités totales	Les élèves • modélisent une situation donnée avec des probabilités conditionnelles et utilisent à bon escient la notation $\mathrm{P_A(B)}$, • représentent une situation à l'aide d'un arbre pondéré d'un tableau à double entrée . • calculent la probabilité d'un événement en utilisant le théorème des probabilités totales sous la forme $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$.
Combinatoire • modèles d'urnes avec et sans respect de l'ordre : - tirage avec remise - tirage sans remise - permutations de k objets - tirage simultané de k objets pris parmi n • règels de calcul : factorielle, nombre d'arrangements, nombre de combinaisons (coefficient binomial)	Les élèves • appliquent les règles de calcul de la combinatoire et les utilisent pour résoudre des tâches dans des contextes pratiques.
Variable aléatoire discrète et loi de probabilité • loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète • espérance mathématique d'une variable aléatoire - $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ - $E(aX+b) = aE(X) + b$ • variance et écart type d'une variable aléatoire - $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, si X, Y sont indépendantes.	Les élèves • déterminent la loi de probabilité d'une variable aléatoire et la représentent sous forme de tableau ou de graphique, • interprètent l'espérance mathématique, dans le cas d'un grand nombre de répétitions, comme une moyenne arithmétique (interprétation fréquentiste de l'espérance), • déterminent l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire à l'aide d'un outil numérique de mathématiques, • calculent l'espérance et la variance d'une variable aléatoire à l'aide des formules.

Loi binomiale • expériences de Bernoulli, schéma de Bernoulli, loi binomiale • fonction de répartition • espérance et variance d'une loi binomiale	Les élèves • décident et justifient si les variables aléatoires peuvent être modélisées à l'aide d'une loi binomiale, • explicitent à l'aide d'un arbre que les coefficients binomiaux indiquent le nombre de chemins pour k succès en n essais, • calculent les probabilités et les probabilités cumulées en utilisant la loi binomiale à l'aide d'un outil numérique (calculatrice, logiciel) • calculent et interprètent l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire binomiale.
Variables aléatoires continues et notion de fonction de densité • Variables aléatoires continues • Fonction de densité • Lien entre la fonction de densité sur un intervalle et la fonction de répartition continue	Les élèves • distinguent à l'aide d'exemples les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires continues, • indiquent la définition d'une fonction de densité et vérifient, sur des exemples choisis, si une fonction est une fonction de densité.
Fonction de Gauss φ et fonction intégrale de Gauss Φ • loi normale $\Phi_{\mu,\sigma}$d'espérance μ et d'écart type σ • loi normale centrée réduite - fonction de densité ϕ définie par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ • ~~formule d'approximation de De Moivre-Laplace~~ •	Les élèves • explicitent qu'avec une taille d'échantillon suffisamment grande, on peut approcher un histogramme par une courbe continue (par exemple par la courbe en cloche de Gauss pour des variables aléatoires suivant une loi binomiale), • indiquent l'expression de la fonction de densité ϕ de la loi normale centrée réduite et la représentent graphiquement, • énoncent l'expression et les propriétés de la fonction intégrale Φ correspondante et en esquissent le graphique, • indiquent qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\Phi_{\mu,\sigma}$ si la variable standardisée $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, • calculent des probabilités associées à une loi normale $\Phi_{\mu,\sigma}$ à l'aide d'outils numériques de mathématiques, • ~~calculent des probabilités à l'aide de la formule d'approximation de De Moivre-Laplace.~~

Tests d'hypothèses • Hypothèse nulle • Hypothèse alternative • Règle de décision • Erreurs de type I et de type II • Risque d'erreur (niveau de signification)	Les élèves • formulent, pour des variables aléatoires suivant une loi binomiale et à partir de dispositifs de test donnés, l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1, • déterminent des règles de décision et indiquent les erreurs de type I et de type II.

Contenu facultatif

Passage de la population à l'échantillon • *intervalle de fluctuation (de prévision) à 95%* $\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ $= \left[p - 1{,}96\frac{\sigma}{n}; p + 1{,}96\frac{\sigma}{n}\right]$ - *Condition d'applicabilité :* $n \geq 30, np \geq 5$ *et* $n(1-p) \geq 5$	*Les élèves* • *conçoivent, mettent en œuvre et exploitent des simulation de situation concrètes à l'aide d'outils numériques,* • *déterminent des intervalles de fluctuation à 95%,* • *indiquent les conditions des approximations,* • *dans le cadre d'une expérience aléatoire, déterminent, à l'aide d'un outil numérique, l'intervalle de fluctuation à un seuil donné* • *décident si une fréquence relative appartient À l'intervalle de fluctuation ou pas.*
Estimation de paramètres • *intervalles de confiance* • *taille de l'échantillon* • *niveau de confiance*	*Les élèves* • *indiquent des intervalles dans lesquels la fréquence relative donnée se situe avec une probabilité de confiance de 95 %,* • *estiment la taille de l'échantillon nécessaire pour garantir une déviation relative maximale par rapport à la proportion réelle, pour un niveau de confiance de 95 %.*

Remarque
- Un concept axiomatique de la probabilité n'est pas prévu.
- Pour la combinatoire, on se limite à des situations permettant des calculs combinatoires simples.
- La formalisation théorique du théorème des probabilités totales n'est pas un attendu, mais les élèves doivent savoir appliquer la formule.
- La démonstration des formules de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire n'est pas demandée.
- L'étude des fonctions de densité générales sur des intervalles non bornés est hors programme.
- En lien avec la loi normale centrée réduite, on peut démontrer que l'espérance est nulle. Une démonstration formelle que la variance définit par $E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$ est 1 n'est pas prévu.
- L'expression de la densité de la loi normale $\Phi_{\mu,\sigma}$ est hors programme.
- On n'applique les tests d'hypothèses qu'au cas de la loi binomiale. Cependant, on mentionne l'existence de tests fondés sur d'autres lois de probabilité.

3 Verbes consignes

Verbes	Définitions
indiquer, nommer	Formuler les résultats numériquement ou verbalement, sans présenter la méthode de résolution et sans justification
justifier	Vérifier ou falsifier une affirmation ou un fait par calcul, selon des règles d'inférence valables, par dérivation ou par argumentation substantielle
calculer	Obtenir des résultats à partir d'une approche ou d'une formule en effectuant des calculs
déterminer, investiguer	Le type de procédure peut être choisi librement – sauf indication contraire par un ajout (par exemple, application de méthodes informatiques ou graphiques). La procédure doit être présentée.
décrire	Décrire un fait ou une procédure avec vos propres mots en utilisant des phrases complètes et une terminologie technique correcte. Une justification de la description n'est pas nécessaire.
juger	Le jugement à rendre doit être motivé.
prouver, montrer	Vérifier les énoncés à l'aide de théorèmes mathématiques connus, de conclusions logiques et de transformations d'équivalence et en observant des critères formels
analyser, interpréter	L'analyse ou l'interprétation établit un lien, par exemple entre une représentation graphique, un terme ou le résultat d'un calcul et un contexte factuel donné.
induire	Extraire des données à partir de représentations données pour répondre à des questions ou pour un traitement ultérieur
décider	Aucune justification n'est nécessaire pour la décision.
expliciter	Présenter et illustrer des faits sur la base de connaissances préalables de manière à ce qu'ils deviennent compréhensibles
représenter graphiquement, dessiner	Reproduire des objets mathématiques sous une forme standard ou prescrite, les représenter graphiquement : produire une représentation graphique précise en caractères basée sur la reproduction exacte de points essentiels ou une représentation graphique à l'échelle réelle ou fidèle d'un objet
esquisser	Le croquis doit être préparé de manière à décrire graphiquement les éléments essentiels du contexte considéré.
vérifier	Vérifier ou falsifier un fait donné en appliquant des règles ou des connaissances mathématiques dans une situation ouverte
étudier	Explorer les faits, les problèmes et les questions de manière ciblée selon des critères spécifiques, courants sur le plan professionnel ou raisonnables
comparer	Identifier les similitudes et les différences
utiliser, exploiter, traiter	Relier des termes techniques, des règles, des théorèmes mathématiques, des relations ou des procédures à un autre sujet
attribuer	Établir un lien justifié entre des objets ou des représentations

2025

Lehrplan / Programme

DFG / LFA

Mathematik / Mathématiques

Vertiefungsfach / Spécialité

Klassenstufen 11 und 12 / Classes de 1ère et Terminale

Inhaltsverzeichnis

1. Leitgedanken

1.1. Bildungsziele

Der Mathematikunterricht fördert maßgeblich die Persönlichkeitsentwicklung junger Menschen durch das Vermitteln von Methodenkompetenz, Sachwissen und inneren Haltungen und stärkt so die vernunftbetonte Selbstbestimmung. Hiermit leistet der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag zu einer vertieften Allgemeinbildung.

Schulische Mathematikkenntnisse sind somit wesentlicher Bestandteil der allgemeinen Studierfähigkeit und bilden die fachlichen Grundlagen für diejenigen jungen Menschen, die nach der Schule ein durch mathematische Denkweisen geprägtes Studium oder Berufsfeld wählen. Neben den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächern sind dies heute verstärkt auch Arbeitsgebiete im wirtschaftlichen und sozialwissenschaftlichen Bereich.

Die Fähigkeit, Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen, ist aber auch ein eigenständiger intellektueller Wert und stellt einen wichtigen Beitrag der Mathematik zu unserer Kultur dar. Die im Mathematikunterricht angebahnten Kompetenzen ermöglichen eine kritische Wertung von gesellschaftlichen Entwicklungen und leitet zu verantwortungsbewusstem Handeln an.

Einblicke in die verschiedenen länderspezifischen Lehrtraditionen tragen zu einem weiteren Ausbau deutsch-französischer interkultureller Kompetenzen bei.

1.2. Zielsetzungen

Ein allgemeinbildender Mathematikunterricht soll unter anderem

- den Schülerinnen und Schülern die Mathematik als anwendungsbezogene, alltagsrelevante sowie beweisende, deduzierende und experimentelle Wissenschaft näherbringen,
- Kreativität und Fantasie fördern,
- Schülerinnen und Schüler befähigen Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen,
- den Schülerinnen und Schülern die kulturelle, historische und philosophische Entwicklung der Mathematik aufzeigen,
- als Übungsfeld für Arbeitstechniken sowie Entwicklungsfeld von kognitiven Strategien dienen,
- Vernetzungen zwischen den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik und mit anderen Wissenschaften verdeutlichen,
- zur allgemeinen Studierfähigkeit beitragen.

Daher ergeben sich für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht unter anderem die folgenden Ziele.

A- <u>Kognitive und prozedurale Kompetenzen</u>[1]

Ganz allgemein sollen die Schülerinnen und Schüler fähig sein

- Situationen aus der Realität zu modellieren und vorliegende Modelle zu validieren oder zu verwerfen (Modellieren),
- Teilergebnisse zu finden und in Beziehung zu setzen, Beweise und Begründungen durchzuführen (Argumentieren und Beweisen),
- geeignete Hilfsmittel zur Problemlösung zu suchen, auszuwählen und einzusetzen – auch mithilfe von Softwaretools (Probleme lösen),
- sich über Mathematik, die Ergebnisse und Wege von Lösungen sowohl mündlich als auch schriftlich auszutauschen (Kommunizieren),

[1] Der vorliegende Lehrplan berücksichtigt die in den Bildungsstandards zur allgemeinen Hochschulreife für das Fach Mathematik formulierten prozessbezogenen, allgemein-mathematischen Kompetenzen, ohne eine explizite Kennzeichnung und Zuordnung zu diesen vorzunehmen.

- Informationen aus Darstellungen zu entnehmen und umgekehrt Ergebnisse geeignet darzustellen,
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen (berechnen, Techniken anwenden und umsetzen).

B- <u>Digitale und technische Kompetenzen</u>

Durch den Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen wie grafikfähigem Taschenrechner (GTR), dynamischer Geometriesoftware, Tabellenkalkulationsprogrammen oder Künstlicher Intelligenz können Lehr- und Lernprozesse unterstützt, bereichert und neu strukturiert werden. Diese Medienkompetenz ist bei der Unterrichtsgestaltung immer mitzudenken, wird aber nicht immer im Lehrplan ausgewiesen.

C- <u>Selbstmanagement-, Orientierungs- und Teamkompetenzen</u>

Der Unterricht fördert das entdeckende Lernen. Die Ausbildung heuristischer Strategien beim Experimentieren und Probieren befähigt die Schülerinnen und Schüler, Beziehungen und Strukturen zu entdecken und sie zu analysieren.
Er versetzt die Schülerinnen und Schüler in die Lage, aus einer Menge von Informationen die für eine anstehende Aufgabe wesentlichen Informationen herauszufiltern.
Der Unterricht leitet die Schülerinnen und Schüler sowohl zum selbstständigen als auch zum kooperativen Lernen an. Er trägt zur Entwicklung von Selbstbewusstsein und Selbstdisziplin, von Leistungsbereitschaft und Konzentrationsfähigkeit bei.

D- <u>Bürgerliche und demokratische Kompetenzen</u>

Der Unterricht stärkt und erweitert das Kommunikationsvermögen. Mathematische Sachverhalte werden mündlich und schriftlich dargestellt oder graphisch veranschaulicht. Das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen, das Formalisieren und das algorithmische und kalkülhafte Arbeiten sind spezifische Formen des mathematischen Ausdrucks. Die Beherrschung der Fachsprache öffnet den Zugang zu vielen Disziplinen, insbesondere den naturwissenschaftlichen, technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Fächern.
Der Unterricht erzieht zu begrifflicher Präzision; er vermittelt die Fähigkeit, Aussagen exakt zu formulieren und logische Schlussfolgerungen zu ziehen. Er fördert die Bereitschaft und die Kompetenz zum Argumentieren und Kritisieren. Er verwendet verschiedene Stufen des Argumentierens, vom beispielgebundenen Verdeutlichen bis zum formalen Beweisen.
Der Unterricht gibt exemplarisch Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Gesellschaft.

E- <u>Deutsch-französische, europäische und internationale Kompetenzen</u>

Der vollständig integrierte Unterricht in den Klassenstufen 10 bis 12 an den Deutsch-Französischen Gymnasien bedeutet für einen Teil der Schülerinnen und Schüler in nichtsprachlichen Fächern immer, dass die Partnersprache als Unterrichtssprache genutzt wird. „Der Einsatz der Fremdsprachen als Arbeitssprachen intensiviert fachliches und sprachliches Lernen und dient der Vorbereitung auf die zunehmende Internationalisierung in Ausbildung, Studium und Berufsleben.“[2] In diesem Sinne wird durch die Bewusstmachung zum einen sprachlicher Prozesse und zum anderen je nach Lehrtradition unterschiedlicher Herangehensweisen an fachliche Fragestellungen das Verständnis für die Partnerkultur befördert.

1.3. Methodische Herausforderungen

Nachhaltige und dauerhafte Lernerfolge setzen eine sorgfältige Auswahl und Variation methodischer Vorgehensweisen voraus. Zu beachten ist insbesondere:

- Der Unterricht trägt zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen zu wesentlichen fachlichen Inhalten und Strategien bei.

[2] “Empfehlungen der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der Fremdsprachenkompetenz” Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2011;
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2011/2011_12_08-Fremdsprachenkompetenz.pdf

- Der Unterricht widmet dem Vernetzen der Inhalte und dem Herstellen von Querbezügen auch zu anderen Fächern besondere Aufmerksamkeit und ermöglicht so Phasen des systematischen Wiederholens.
- Im Unterricht kann der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und Medien den Zugang zu mathematischen Inhalten erleichtern.
- Der Unterricht befasst sich verstärkt mit Aufgabenstellungen oder Lernumgebungen, die einem situativen Kontext entspringen, wobei auch ergebnisoffene Formulierungen gewählt werden.

In weiten Teilen des Alltagslebens und in nahezu allen Bereichen des Berufslebens, in denen höher qualifizierte Tätigkeiten ausgeübt werden, ist es von Bedeutung, quantitative Zusammenhänge und abstrakte Strukturen zu erfassen und weiter zu bearbeiten. Dabei kommen verstärkt heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren zum Tragen, die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen. Gerade der Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen wie grafikfähige Taschenrechner (GTR), dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulationsprogramme oder Künstlicher Intelligenz macht es häufig nötig, die zu Grunde liegenden mathematischen Methoden zu verstehen, da es nur so gelingen kann, Möglichkeiten und Grenzen dieser Hilfsmittel zu beurteilen und sie sinnvoll einzusetzen. Dies beinhaltet die kritische Auseinandersetzung insbesondere mit Ergebnissen, die mittels Künstlicher Intelligenz erhalten wurden.

Es erscheint sinnvoll, verschiedene Inhalte und Kompetenzen zu vernetzen und in anderen Zusammenhängen immer wieder aufzugreifen, sodass ein spiralförmiges vertiefendes Lernen möglich wird.

Zusätzlich muss speziell in Klassenstufe 10 genügend Zeit für die Zusammenführung der deutsch-französischen Schülerschaft gegeben werden. Hier werden unterschiedliche Herangehens-, Sprech- und Schreibweisen thematisiert, Grundlagen werden angeglichen und gefestigt. Die Zusammenführung kann zu Beginn von Klasse 10 in einem größeren Block erfolgen.

1.4. Leistungsbewertung

Die Leistungsbewertung erfolgt zum einen im Rahmen einer lernprozessbezogenen Leistungsbewertung unter Einbezug der Leistungen aus dem Unterricht.
Zum anderen dienen schriftliche Arbeiten der Beurteilung von und Rückmeldung zu im Unterricht erworbenen Kompetenzen bezüglich im Unterricht behandelter Themen und Lerngegenstände. Als Orientierung für die Konstruktion von Aufgaben dient die Beschreibung von Anforderungsbereichen. Mit ihrer Hilfe und nach Maßgabe des Lehrplans sollen Aufgaben zur Leistungsmessung formuliert werden. Dabei muss es Ziel der Leistungsmessung sein, das Leistungsvermögen der Prüflinge möglichst differenziert zu erfassen.

Die Berücksichtigung von **Anforderungsbereichen** trägt wesentlich dazu bei, ein ausgewogenes Verhältnis der Anforderungen zu erreichen, die Vergleichbarkeit von Aufgaben zu erhöhen sowie die Bewertung von Leistungen transparent zu machen. Im vorliegenden Lehrplan wird auf eine explizite Ausweisung von Anforderungsbereichen in den einzelnen Themenfeldern verzichtet.

Der **Anforderungsbereich I (Reproduzieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit geringerem Komplexitätsgrad wie

- die Wiedergabe von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Der **Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit mittlerem Komplexitätsgrad wie

- das selbstständige Auswählen, Anordnen und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Üben bekannten Zusammenhang und ähnlich zu Vorgehensweisen im Unterricht,

- das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen geht.

Der **Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit höherem Komplexitätsgrad wie

- das planmäßige und kreative Bearbeiten komplexer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- das bewusste und selbstständige Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung neuer Problemstellungen.

2. Fachliche Inhalte und Kompetenzen

Der Lehrplan ist nach einzelnen Lernbereichen gegliedert. In zwei Spalten werden jeweils der verbindliche Inhalt und die verbindlichen zu erwartenden Kompetenzen aufgeführt. Die Zuordnung der erwarteten Kompetenzen zu den Inhalten schließt nicht aus, dass weitere Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern erworben werden können.

Die Reihenfolge der einzelnen Themen ist innerhalb der angegebenen Klassenstufe nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Darüber hinaus nimmt sie aber die didaktisch-methodischen Entscheidungen der Lehrkraft bzw. der Fachkonferenzen Mathematik nicht vorweg.

2.1 Klassenstufe 11

2.1.1 Folgen

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Allgemeines zu Folgen • Definition einer Folge • Indexschreibweise • Bildungsgesetze von Folgen - explizit - rekursiv - Beschreibung einer Folge in Wortform • graphische Darstellung einer Folge • Monotonie einer Folge - konstante Folgen - wachsende Folgen - fallende Folgen	Die Schülerinnen und Schüler • modellieren konkrete Situationen mit Hilfe von Folgen und untersuchen diese, • stellen Folgen graphisch dar und ziehen hieraus Schlüsse auf Eigenschaften der Folge, • untersuchen das Monotonieverhalten einer Folge.
Das Prinzip der vollständigen Induktion	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern die Beweismethode der vollständigen Induktion, • beweisen geeignete Sätze mithilfe der vollständigen Induktion (z. B. Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen bzw. Quadratzahlen, Nachweis arithmetischer Eigenschaften wie „4 ist ein Teiler von $5^n - 1$“).
Arithmetische Folgen • Definition • graphische Darstellung • explizite und rekursive Bildungsgesetze • Partialsumme • Grenzwert	Die Schülerinnen und Schüler • geben die Definition einer arithmetischen Folge an, • stellen arithmetische Folgen graphisch dar, • wandeln die rekursive Darstellung in die explizite um und umgekehrt, • berechnen die Partialsumme arithmetischer Folgen.

Geometrische Folgen • Definition • graphische Darstellung • explizite und rekursive Bildungsgesetze • Partialsumme • Grenzwert, Konvergenzkriterium	Die Schülerinnen und Schüler • geben die Definition einer geometrischen Folge an, • stellen geometrische Folgen graphisch dar, • wandeln die rekursive Darstellung in die explizite um und umgekehrt, • berechnen die Partialsumme geometrischer Folgen, • formulieren das Konvergenzkriterium einer geometrischen Folge ($-1 < q < 1$) und wenden es an.

Hinweis

- Bei der Formulierung des Konvergenzkriteriums soll lediglich eine intuitive Betrachtung des Grenzwertbegriffs stattfinden.

2.1.2 Analysis – Fortführung von Funktionen

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Verkettung von Funktionen • Verkettung von Funktionen - innere Funktion, äußere Funktion	Die Schülerinnen und Schüler • geben bei einer Verkettung von Funktionen die innere und die äußere Funktion an, • bilden zu zwei vorgegebenen Funktionen deren Verkettungen.
Umkehrfunktionen • Umkehrfunktion, Schreibweise $f^{-1}(x)$ • Symmetrie der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion	Die Schülerinnen und Schüler • entscheiden begründet, ob eine Funktion umkehrbar ist, • stellen zu einer umkehrbaren Funktion eine Gleichung der zugehörigen Umkehrfunktion auf, • zeichnen den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegelung des Graphen der Funktion an der ersten Winkelhalbierenden, • leiten aus der Symmetrie der Funktionsgraphen Eigenschaften der Umkehrfunktion her.

Grenzwerte
• Vergleichssätze, Einschnürungssatz
• Asymptoten
  - waagerechte
  - senkrechte
  - schiefe
	Die Schülerinnen und Schüler
	• bestimmen Grenzwerte von Summen, Produkten, Quotienten und Verkettungen grundlegender Funktionen,
	• ermitteln Grenzwerte mithilfe von Vergleichssätzen,
	• bestimmen Gleichungen der Asymptoten von Graphen gebrochen rationaler Funktionen,
	• weisen nach, dass eine gegebene Gerade Asymptote des Graphen einer vorgegebenen Funktion ist.

Weitere Ableitungsregeln • Produktregel • Quotientenregel • Kettenregel • Höhere Ableitungen	Die Schülerinnen und Schüler • begründen die Differenzierbarkeit eines Produkts, eines Quotienten bzw. einer Verkettung zweier Funktionen, • bestimmen höhere Ableitungen, • bestimmen Ableitungen zusammengesetzter Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln.
Krümmungsverhalten: • Linkskrümmung/Rechtskrümmung • Wendestelle • Wendepunkte	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen graphisch und rechnerisch das Krümmungsverhalten sowie die Wendestellen bzw. Koordinaten der Wendepunkte eines Funktionsgraphen, • nutzen Krümmungsverhalten, Wendestellen und –punkte zur Untersuchung von Funktionsgraphen.

Hinweise

- Der Begriff der Umkehrbarkeit kann zur Einführung der Logarithmusfunktionen (siehe 2.1.4) verwendet werden.
- Es ist eher an eine qualitative Anwendung des Grenzwertbegriffs gedacht. Beweise sollen daher nicht den Mittelpunkt der Untersuchungen bilden. Die Begriffe und Sätze sind eher an Beispielen zu verdeutlichen.
- Die Behandlung des Lernbereichs „Grenzwerte“ kann auch im Zusammenhang mit dem Lernbereich „Gebrochen rationale Funktionen“ (siehe 2.1.4) erfolgen.
- Die zweite Ableitung wird formal durch Anwendung der Ableitungsregeln auf die erste Ableitung erhalten. Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung wird erst bei der Untersuchung des Krümmungsverhaltens von Graphen thematisiert.
- Wendepunkte werden lediglich durch die Vorzeichenuntersuchung der zweiten Ableitung bestimmt.
- Beim Ableiten gebrochen rationaler Funktionen sollen im Zähler und Nenner maximal Funktionen 3. Grades stehen.

2.1.3 Trigonometrie

Inhalt	Verbindliche Kompetenzen

Grundlagen der Trigonometrie
• Einheitskreis
  - orientiertes Winkelmaß
  - Sinus und Kosinus am Einheitskreis
• Bogenmaß
  - Einheit Radiant (1 rad)
  - Bogenlänge
  - Hauptwert
• trigonometrischer Pythagoras
	Die Schülerinnen und Schüler
	• zeichnen den zu einem Winkel α zugehörigen Punkt P auf dem Einheitskreis und geben $sin(\alpha)$ und $cos(\alpha)$ als entsprechende y- und x-Koordinaten des Punktes P an,
	• bestimmen am Einheitskreis Lösungen von Gleichungen vom Typ $cos(x) = cos(\alpha)$ und $sin(x) = sin(\alpha)$ und stellen die Lösungen am Einheitskreis dar,

• trigonometrische Gleichungen	• bestimmen zu einem Winkelmaß im Gradmaß das entsprechende Bogenmaß und den Hauptwert im Intervall $]-\pi;\pi]$, • geben das Bogenmaß besonderer Winkel als Bruchteile bzw. Vielfache von π an, • bestimmen zu Winkelmaßen x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ im Bogenmaß das entsprechende Gradmaß.

2.1.4 Analysis – weitere Funktionsklassen

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Trigonometrische Funktionen • Sinusfunktion mit $f(x) = sin(x)$ und Kosinusfunktion mit $f(x) = cos(x)$ - Definitionsmenge - Wertemenge - Periode - Nullstellen - Monotonieintervalle - Symmetrieeigenschaften (Punkt- bzw. Achsen-symmetrie) - Graph - Ableitungen: $(sin(x))' = cos(x)$ $(cos(x))' = -sin(x)$ • Allgemeine trigonometrische Funktionen - $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ - $f(x) = a \cdot cos(b \cdot x + c) + d$ mit $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $c, d \in \mathbb{R}$	Die Schülerinnen und Schüler • geben die Eigenschaften der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion an und zeichnen ihre Graphen, • bestimmen zu einer Stelle x $(-x, \pi \pm x, \frac{\pi}{2} \pm x)$ die entsprechenden Sinus- bzw. Kosinuswerte anhand der Graphen der trigonometrischen Funktionen, • nennen die besonderen Werte der Sinusfunktion bzw. der Kosinusfunktion für $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$, • beschreiben den Einfluss der Parameter a, b, c und d der allgemeinen Funktionsgleichung auf die Graphen von Sinus- bzw. Kosinusfunktion, • bestimmen zu vorgegebenen Funktionsgraphen die Werte der Parameter a, b, c und d, • beschreiben die Analogie zur Bedeutung der Parameter bei den quadratischen Funktionen, • berechnen Ableitungen von trigonometrischen Funktionen.
Gebrochen rationale Funktionen • Definitionsmenge • Stetigkeit und Differenzierbarkeit • Symmetrie (gerade bzw. ungerade Funktionen) • Grenzwerte • Asymptoten • Nullstellen • Monotonieintervalle • Extremstellen • Wendestellen • Graphen	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen die Definitionslücken einer gebrochen rationalen Funktion und die Grenzwerte an den Definitionslücken, • vereinfachen gegebenenfalls den Funktionsterm einer gebrochen rationalen Funktion durch Polynomdivision oder Faktorisieren, • untersuchen rechnerisch Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen und skizzieren ihre Graphen, • beschreiben den Zusammenhang zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ bzw. $f(x) = \frac{a}{(x-b)^2} + c$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
Exponentialfunktionen • **allgemeine Exponentialfunktionen mit Basis b** - Definitionsmenge - Wertemenge - Monotonie	Die Schülerinnen und Schüler • geben Eigenschaften der Exponentialfunktionen an und skizzieren ihre Graphen, • geben an, dass e die Basis derjenigen Exponentialfunktion mit $f'(0) = 1$ ist,

- Grenzwerte - Graph - Differenzierbarkeit von Funktionen mit $f(x) = b^x$ • **natürliche Exponentialfunktion mit Basis e (e-Funktion)** - Definition der Eulerschen Zahl e - Definition der e-Funktion mit $f(x) = e^x$ - Eigenschaften der e-Funktion (Ableitung, Monotonie, Krümmung, Grenzwerte, Asymptoten, Graph) • **zusammengesetzte Funktionen** - Produkte, Quotienten und einfache Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen - Verhalten von Funktionen mit $f(x) = x^n \cdot e^{cx}$ für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$ • **exponentielles Wachstum** - charakteristische Merkmale - konstanter Quotient $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ - Grenzwertverhalten - Modellieren von Wachstumsprozessen • **Differentialgleichungen der Form $y' = ay$ und $y' = ay + b$**	• untersuchen Exponentialfunktionen sowie aus der e-Funktion und ganzrationalen Funktionen zusammengesetzte Funktionen, • bestimmen das Verhalten von Funktionen der Form $f(x) = x^n \cdot e^{cx}$ für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$, • geben Beispiele für exponentielles Wachstum an, • nennen Unterschiede zwischen exponentiellem und linearem Wachstum, • modellieren exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse und beurteilen die Validität ihres Models, • lösen Differentialgleichungen der Form $y' = ay$ und $y' = ay + b$.
Logarithmusfunktion • **Logarithmusbegriff** - Definition - Eigenschaften - Logarithmengesetze • **natürliche Logarithmus-Funktion (ln-Funktion)** - Definition - Eigenschaften (Differenzierbarkeit und Ableitung, Stammfunktionen, Monotonie, Krümmung, Wertemenge, Verhalten für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$, Graph) - Funktionaleigenschaften	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern den Begriff des Logarithmus und nennen $log_b(x)$ als Lösung von $b^y = x$, • formulieren grundlegende Eigenschaften und die Logarithmengesetze sowie deren Folgerungen und wenden sie an, • kennen den folgenden Zusammenhang und wenden ihn zur Berechnung allgemeiner Logarithmen an: $log_b(x) = \frac{log_c(x)}{log_c(b)} = \frac{ln(x)}{ln(b)}$, • formulieren die Definition der ln-Funktion sowie ihre Eigenschaften und die grundlegenden Funktionaleigenschaften $ln(x_1 \cdot x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)$ $ln(x^r) = r \cdot ln(x)$,

• **zusammengesetzte Funktionen** - Produkte, Quotienten und Verkettungen der ln-Funktion mit ganzrationalen Funktionen - Verhalten von Funktionen mit $f(x) = x^n \cdot ln(x)$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$; $n \in \mathbb{N}$ • **Stammfunktionen zu** $\boldsymbol{f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$ (logarithmisches Integrieren)	• erkennen den folgenden Zusammenhang: $b^x = e^{x \cdot ln(b)}$ • geben an, dass die ln-Funktion diejenige Stammfunktion von $x \to \frac{1}{x}$ ist, die den Funktionswert 0 an der Stelle 1 besitzt: $ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt$, • untersuchen aus der ln- Funktion und ganzrationalen Funktionen zusammengesetzte Funktionen, • bestimmen das Verhalten von Funktionen der Form $f(x) = x^n \cdot ln(x)$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$, • bestimmen Stammfunktionen zu Funktionstermen der Form $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

Hinweise

- Allgemein sollen bei den gebrochen rationalen Funktionen keine zu komplizierten Nennerfunktionen verwendet werden (Beschränkung bis zum Grad 2).
- Wendepunkte werden lediglich durch die Vorzeichenuntersuchung der zweiten Ableitung bestimmt.
- Funktionenscharen sollen das Gebiet abrunden, allerdings nicht im Mittelpunkt der Untersuchung stehen.
- Die Bestimmung von Gleichungen schiefer Asymptoten kann mittels Polynomdivision erfolgen.
- Begründungen wie „Exponentialfunktionen wachsen stärker als Potenzfunktionen“ reichen zur Bestimmung des Grenzwertverhaltens an den Rändern der Definitionsmenge aus. Eine formale Begründung der Grenzwertsätze wird nicht erwartet.
- Die ln-Funktion kann als Umkehrfunktion der e-Funktion eingeführt werden. Alternativ ist eine Einführung als $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ möglich – sofern die Integralrechnung schon eingeführt wurde.
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll sich bei der Behandlung des allgemeinen Logarithmus auf Basen $b > 1$ beschränkt werden.

2.1.5 Analysis – Integralrechnung

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Integral und Stammfunktion • Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen • Einführung des Integrals • Eigenschaften des Integrals (Linearität, Intervalladditivität) • Integrationsregeln • bestimmtes Integral • Stammfunktionen • Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern Methoden der näherungsweisen Bestimmung von Flächeninhalten (z. B. mithilfe ein- und umbeschriebener Rechtecke) • bestimmen näherungsweise Inhalte von krummlinig begrenzten Flächen, • geben die Bedeutung sowie die Eigenschaften des Integrals an, • erläutern den Begriff Stammfunktion und geben zu einer vorgegebenen Funktion eine Stammfunktion an,

• Anwendungen des Integrals bei Flächenberechnungen: - Fläche zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse - Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen • Partielle Integration	• begründen, dass es zu einer Funktion mehrere Stammfunktionen gibt, die sich durch additive Konstanten unterscheiden, • berechnen bestimmte Integrale mit Hilfe der Formel $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$, • ermitteln Inhalte von krummlinig begrenzten Flächen mithilfe der Integralrechnung, • lösen anwendungsorientierte Probleme mithilfe der Integralrechnung, • berechnen Integrale mithilfe der partiellen Integration.

2.2 Klassenstufe 12

2.2.1 Vektorielle Geometrie – Grundlagen [3]

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Vektoren • Vektorrechnung im Raum • kartesisches Koordinatensystem im Raum	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Punkte und Repräsentanten von Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem dar, • übertragen die für Vektoren in der Ebene bekannte Begriffsbildungen und geltenden Rechenregeln auf Vektoren im Raum.
Kollinearität und Komplanarität • lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren im Raum	Die Schülerinnen und Schüler • veranschaulichen die Kollinearität zweier Vektoren bzw. die Komplanarität dreier Vektoren geometrisch, • überprüfen rechnerisch, ob zwei Vektoren kollinear bzw. drei Vektoren komplanar sind.
Das Skalarprodukt in der Ebene und im Raum • Definition • Eigenschaften • Winkel zwischen zwei Vektoren • Rechenregeln • Betrag eines Vektors • Orthogonalität zweier Vektoren • Anwendungen des Skalarprodukts: - Berechnung von Winkelmaßen - Berechnung von Streckenlängen	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen Skalarprodukte, • wenden die Rechenregeln für das Skalarprodukt an, • geben den Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt und dem Betrag eines Vektors an, • berechnen Beträge von Vektoren, • überprüfen die Orthogonalität zweier Vektoren mithilfe des Skalarprodukts, • beweisen geeignete geometrische Sätze mithilfe des Skalarprodukts (z. B. Satz des Thales, Satz des Pythagoras, Höhensatz), • berechnen mit Hilfe des Skalarproduktes Maße von Winkeln und Längen von Strecken.
Das Vektorprodukt • Definition • Eigenschaften • Rechengesetze: $\vec{u}x\vec{v} = -\vec{v}x\vec{u}$ $\vec{u}x(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}x\vec{v} + \vec{u}x\vec{w}$ • Anwendung des Vektorprodukts - Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms und eines Dreiecks	Die Schülerinnen und Schüler • nennen die Definition und Eigenschaften des Vektorprodukts, • bestimmen mit Hilfe des Vektorprodukts einen Vektor, der orthogonal zu zwei gegebenen Vektoren ist, • berechnen mit Hilfe des Vektorproduktes den Flächeninhalt eines Parallelogramms und eines Dreiecks, • bestimmen einen Normalenvektor einer Ebene.

[3] Im Folgenden beziehen sich alle Vorgaben auf geometrische Objekte in kartesischen Koordinatensystemen.

- Bestimmung eines Normalenvektors einer Ebene	

Fakultative Inhalte

Anwendungen des Skalarprodukts • *Additionstheoreme der Trigonometrie*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *wenden die Formeln der Additionstheoreme an.*
Anwendungen des Vektorprodukts • *Nachweis der Kollinearität von Vektoren*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *überprüfen mithilfe des Vektorprodukts, ob zwei Vektoren kollinear sind.*

Hinweise
- Alle Inhalte der Vektorrechnung werden algebraisch behandelt.

2.2.2 Vektorielle Geometrie – Objekte im Raum [4]

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Geraden im Raum • Darstellungen von Geraden im Raum - Zweipunktegleichung - vektorielle Parametergleichung	Die Schülerinnen und Schüler • stellen eine Parametergleichung einer Gerade auf und begründen, dass diese nicht eindeutig ist, • stellen Geraden in einem Koordinatensystem geeignet dar, • überprüfen rechnerisch, ob ein vorgegebener Punkt auf einer Geraden liegt.
Ebenen im Raum • Darstellungen von Ebenen im Raum - Dreipunktegleichung - vektorielle Parametergleichung mit zwei nicht kollinearen Spannvektoren - Normalengleichung - Koordinatengleichung	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Ebenengleichungen auf (auch in Sachkontexten), • stellen Ebenen in einem Koordinatensystem geeignet dar, • überprüfen rechnerisch, ob ein vorgegebener Punkt in einer Ebene liegt, • wandeln die verschiedenen Darstellungen von Ebenen ineinander um.
Lagebeziehungen und Schnittwinkel • Lageziehungen: - Gerade – Gerade - Gerade – Ebene - Ebene – Ebene	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben die möglichen Lagebeziehungen zwischen den vorgegebenen Objekten,

[4] Im Folgenden beziehen sich alle Vorgaben auf geometrische Objekte in kartesischen Koordinatensystemen.

• Schnittwinkel zwischen - zwei Geraden - zwei Ebenen - einer Gerade und einer Ebene	• untersuchen rechnerisch die Lagebeziehungen zwischen den vorgegebenen Objekten, • bestimmen die Maße von Schnittwinkeln zwischen den vorgegebenen Objekten.
Abstände • Abstand eines Punktes von - einer Ebene - einer Gerade • Abstand - zweier paralleler Geraden - einer Geraden von einer zu ihr parallelen Ebene - zweier paralleler Ebenen	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen Abstände zwischen den vorgegebenen Objekten.
Komplexe Anwendungen • Spiegelung eines Punkts an - einem Punkt - einer Ebene • Volumen von Quader und Pyramide	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen die Koordinaten von Spiegelpunkten, • berechnen Volumen von Quader und Pyramiden, • weisen geometrische Eigenschaften nach (z. B. Quadrat, gleichschenkliges Dreieck, …)

Fakultative Inhalte

Der Kreis • *Darstellungen von Kreisen:* - *Koordinatengleichung* - *Vektorgleichung*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *wandeln eine Darstellungsform in die andere um.*
Die Kugel • *Darstellungen von Kugeln:* - *Koordinatengleichung* - *Vektorgleichung* • *Lagebeziehungen* - *Kugel-Gerade* - *Kugel-Ebene* - *Kugel-Kugel*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *wandeln eine Darstellungsform in die andere um,* • *untersuchen rechnerisch die Lagebeziehungen,* • *bestimmen beim Schnitt zweier Kugeln eine Gleichung des Schnittkreises.*

Hinweise

- Die Untersuchung von Lagebeziehungen im Raum bietet die Möglichkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen und zu lösen.
- Als Anwendung der Abstandsberechnungen bieten sich Spiegelungen von einem Punkt an einer Ebene oder an einer Geraden an.
- Parameterdarstellungen des Kreises sind nicht vorgesehen.

2.2.3 Statistik und Wahrscheinlichkeit

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Beschreibende Statistik • ~~Datenerhebung und -erfassung, Umgang mit Daten, Darstellungsformen, Diagramme~~ • ~~absolute und relative Häufigkeiten~~ • ~~Median, Quartile, Boxplot~~ • arithmetischer Mittelwert • Streumaße: - Varianz - Standardabweichung	Die Schülerinnen und Schüler • ~~erheben und erfassen Daten statistisch, ordnen diese an, stellen sie übersichtlich dar, analysieren und interpretieren sie,~~ • ~~bestimmen absolute und relative Häufigkeiten~~ • ~~berechnen zu vorgegebenen Datensätzen den Median und die Quartilen und bewerten die Daten damit,~~ • berechnen zu vorgegebenen Datensätzen den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung und bewerten die Daten damit, • untersuchen eine Datenreihe und stellen Zusammenhänge zwischen zwei Datenreihen mithilfe eines digitalen Mathematikwerkzeugs dar.
~~**Wahrscheinlichkeiten**~~ • ~~Zufallsexperiment~~ - ~~Ergebnisse des Zufallsexperiments $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$~~ - ~~Ergebnismenge Ω~~ - ~~relative Häufigkeit eines Ergebnisses~~ - ~~Empirisches Gesetz der großen Zahlen~~ • ~~Ereignisse~~ - ~~Elementarereignisse~~ - ~~Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses~~ - ~~die Ereignisse $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$~~ - ~~Wahrscheinlichkeit für $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$~~ • ~~Wahrscheinlichkeitsverteilung~~ • ~~Vierfeldertafel~~ • ~~Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind (Laplace-Experimente)~~	~~Die Schülerinnen und Schüler~~ • ~~interpretieren den Begriff der Wahrscheinlichkeit im Zusammenhang mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen als stabilisierte relative Häufigkeit und lösen damit zusammenhängende Aufgaben und Probleme,~~ • ~~geben Ergebnismengen von einfachen Zufallsexperimenten an und berechnen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (auch die des Gegenereignisses, des Und-Ereignisses, des Oder-Ereignisses),~~ • ~~erstellen Vierfeldertafeln und bestimmen damit Wahrscheinlichkeiten,~~ • ~~entscheiden begründet, ob Zufallsexperimente Laplace- Experimente sind und berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten.~~
Mehrstufige Zufallsexperimente • Baumdiagramm • Pfadregeln - Multiplikationsregel - Additionsregel	Die Schülerinnen und Schüler • geben bei n-stufigen Zufallsexperimenten die Ergebnisse als n-Tupel an, • stellen mehrstufige Zufallsexperimente in Baumdiagrammen dar,

• Vereinfachtes Baumdiagramm	• berechnen mithilfe der Pfadregeln Wahrscheinlichkeiten bei n-stufigen Zufallsexperimenten.
Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit • bedingte Wahrscheinlichkeit • Unabhängigkeit zweier Ereignisse • Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler • entnehmen Bedingungen aus Aufgabentexten und stellen bedingte Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Notation $P_A(B)$ dar, • stellen eine Situation mit bedingten Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel dar, • berechnen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit in der Form $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$.
Kombinatorik • Urnenmodelle mit und ohne Beachtung der Reihenfolge - Ziehen mit Zurücklegen - Ziehen ohne Zurücklegen - Permutationen von k Objekten - gleichzeitiges Ziehen von k aus n Objekten • Rechenregeln: n-Fakultät, k-Permutationen, Kombinationen	Die Schülerinnen und Schüler • wenden die Rechenregeln der Kombinatorik an und lösen damit Aufgaben in Sachkontexten.
Diskrete Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung • Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße • Erwartungswert der Zufallsgröße - $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ - $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$ • Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße - $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, wenn X, Y unabhängig.	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße und stellen sie in Form einer Tabelle oder eines Schaubildes dar, • interpretieren den Erwartungswert im Falle einer hohen Anzahl von Wiederholungen als arithmetisches Mittel (Häufigkeitsinterpretation des Erwartungswertes), • bestimmen den Erwartungswert, die Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße mithilfe eines digitalen Mathematikwerkzeugs, • berechnen Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße mithilfe der Formeln.
Binomialverteilung • Bernoulli-Experimente, Bernoulli-Ketten, Binomialverteilung • Verteilungsfunktion • Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung	Die Schülerinnen und Schüler • entscheiden begründet, ob Zufallsgrößen mithilfe einer Binomialverteilung modelliert werden können,

	• erläutern anhand eines Baumdiagramms, dass die Binomialkoeffizienten die Anzahl der Pfade für k Treffer bei n Versuchen angeben, • berechnen Wahrscheinlichkeiten und kumulierte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Binomialverteilung unter Verwendung eines digitalen Mathematikwerkzeugs, • berechnen und interpretieren den Erwartungswert und die Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße.
Stetige Zufallsgrößen und der Begriff der Dichtefunktion • Stetige Zufallsgrößen • Dichtefunktion • Zusammenhang zwischen Dichtefunktion auf einem Intervall und stetiger Verteilungsfunktion	Die Schülerinnen und Schüler • unterscheiden exemplarisch zwischen einer diskreten und einer stetigen Zufallsgröße, • geben die Definition einer Dichtefunktion an und überprüfen an ausgewählten Beispielen, ob eine Funktion eine Dichtefunktion ist.
Gauß-Funktion φ und Gaußsche Integralfunktion Φ • Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ • Standardnormalverteilung - Dichtefunktion φ mit $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ • ~~Näherungsformel von De Moivre-Laplace~~	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern, dass man bei einem genügend großen Stichprobenumfang ein Histogramm durch einen stetigen Graphen annähern kann (exemplarisch durch die Gaußsche Glockenkurve bei binomialverteilten Zufallsgrößen), • geben die Funktionsgleichung der Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung an und stellen diese graphisch dar, • nennen die Funktionsgleichung und die Eigenschaften der zugehörigen Integralfunktion Φ und skizzieren ihren Graphen, • geben an, dass eine Zufallsgröße X der Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ genügt, wenn die Zufallsgröße $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt ist, • berechnen Wahrscheinlichkeiten, denen eine Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ zugrunde liegt, mithilfe von digitalen Mathematikwerkzeugen.~~,~~ ~~berechnen Wahrscheinlichkeiten mit der Näherungsformel von De Moivre-Laplace.~~
Testen von Hypothesen • Nullhypothese • Alternativhypothese • Entscheidungsregeln • Fehler 1. und 2. Art • Irrtumswahrscheinlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler • formulieren zu binomialverteilten Zufallsgrößen anhand vorgegebener Testanordnungen die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1, • ermitteln Entscheidungsregeln und geben den Fehler 1. und 2. Art an.

Fakultative Inhalte

Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe	Die Schülerinnen und Schüler
• *95%-Prognoseintervall:* $\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[p - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{n}; p + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{n}\right]$ - Bedingungen *für die Näherungen:* $n \geq 30, np \geq 5$ *und* $n(1-p) \geq 5$	• *konzipieren Simulationen konkreter Situationen, führen diese durch und erkunden bzw. werten sie mithilfe von digitalen Mathematikwerkzeugen aus,* • *bestimmen 95%-Prognoseintervalle,* • *geben die Bedingungen für die Näherungen an,* • *bestimmen zu einem Zufallsexperiment unter Verwendung eines digitalen Mathematikwerkzeugs bei einem gegebenen Signifikanzniveau ein Prognoseintervall* • *entscheiden, ob eine relative Häufigkeit im Prognoseintervall liegt.*
Schätzen von Parametern • *Konfidenzintervalle* • *Stichprobenumfang* • *Sicherheitswahrscheinlichkeit*	*Die Schülerinnen und Schüler* • *geben Intervalle an, in denen die gegebene relative Häufigkeit mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% liegt,* • *schätzen den Umfang der Stichprobe zu einer maximalen relativen Abweichung vom wirklichen Anteil bei einer gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% ab.*

Hinweise

- Ein axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht vorgesehen.
- In der Kombinatorik ist eine Einschränkung auf Situationen mit einfachen kombinatorischen Berechnungen zu beachten.
- Die mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit verbundene Begriffsbildung wird von den Schülerinnen und Schülern nicht erwartet, aber sie sollen sicher sein im Einsatz der Formel.
- Die Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße müssen nicht bewiesen werden.
- Auf eine Behandlung allgemeiner Dichtefunktionen auf einem nichtbeschränkten Intervall soll verzichtet werden.
- Im Zusammenhang mit der Standardnormalverteilung kann man beweisen, dass der Erwartungswert gleich 0 ist. Ein formaler Beweis dafür, dass die als $E((X - E(X))^2)$ definierte Varianz gleich 1 ist, wird nicht verlangt.
- Die Kenntnis des Funktionsterms der allgemeinen Dichtefunktion der Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ wird nicht verlangt.
- Beim Testen von Hypothesen sollen nur Anwendungen der Binomialverteilung betrachtet werden. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass auch Hypothesentests mit anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen existieren.

3 Operatoren

Operator	Definition
angeben, nennen	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen
begründen	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnung, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitung oder in inhaltlicher Argumentation verifizieren oder falsifizieren
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
beschreiben	Einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter korrekter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beweisen, zeigen	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
entnehmen	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterverarbeitung aufbereiten
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
erläutern	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden
graphisch darstellen, zeichnen	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben, graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte bzw. maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche graphisch beschreibt.
überprüfen	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten
verwenden, nutzen, umgehen mit	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen
zuordnen	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen